Les groupements

Freddy Bonnin

8 avril 2004

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

Je me dois de prévenir le lecteur que ce qui est exposé dans ce mémoire n'est qu'une tentative de généralisation de la notion de catégorie. Une tentative et rien de plus. Sur bien des points, cet essai n'est pas tout à fait finalisé mais les principaux objectifs que nous nous étions donnée ont été à peu près atteints.

Depuis très longtemps, différentes extensions de la notion de catégorie ont été envisagées. Une des premières a l'avoir été fut la notion bien connue de graphe. Cette structure fut et est encore très étudier pour ses propriétés combinatoires et son utilisation possible dès que l'on souhaite étudier des choses qui ont une origine et une fin. En effet un graphe est tout simplement un ensemble muni de deux applications qui indiquent la source et le but de chaque élément. De part leur simplicité ont les rencontre souvent dans des applications pratiques (informatique et économie). Mais c'est une extension qui présente le défaut de ne pas avoir de composition. Pour résoudre ce problème on s'intéresse souvent à la catégorie libre engendrée par le graphe.

D'autres extensions ont été étudiée. Leur point commun est un affaiblissement de la composition. Pour être plus précis, on s'intéresse ici à un graphe $(G; s; t)$ muni d'une opération binaire partiellement définie (*i.e.* $\circ : G_1 \to G$, où G_1 est un sous-ensemble de $G \times G$) soumise aux conditions suivantes : si $g \circ f$ existe alors $s(g) = t(f)$, $s(g \circ f) = s(f)$ et $t(g \circ f) = t(g)$. Si on suppose de plus que les compositions $t(f) \circ f$, $f \circ s(f)$ existent toujours et sont égales à f alors on obtient un graphe multiplicatif fortement identitaire que Charles Ehresmann [1] a plus simplement appelé graphe multiplicatif ou néocatégorie. Lurtz Schöder et Horst Herrlich [5] ont quand à eux affaibli la condition précédente en n'imposant pas l'existence de $t(f) \circ f$ et $f \circ s(f)$ mais en les obligeant à être égales à f si elles existent. Ils parlent alors de graphe multiplicatif faiblement identitaire. En supposant que la composition est aussi associative, ils aboutissent à la notion de semicatégorie. Paulo Mateus, Amilcar Sernadas et Cristina Sernadas [4] ont utilisé les précatégories (en même temps néocatégorie et semicatégorie) pour étudier la combinaison des automates probabilistes (informatique).

Aussi intéressantes soient-ils, tous ces cas présentent le défaut d'imposer le fait que les éléments sources et buts sont nécessairement des identités à partir du moment où ils sont composables. Cette condition s'avère un obstacle très difficile (voir impossible à lever) quand on souhaite généraliser certaine construction géométrique. Par exemple, Mikhail Kapranov et Vladimir Voevodsky [2] ont échoué dans leur tentative de généralisation des espaces de lacets de Moore en dimension supérieur car leur construction ne satisfait pas les conditions sur les identités. Il semblait par conséquent intéressant de voir ce qui pouvait se passer si on supprimait ces conditions identitaires.

Le premier chapitre est consacré à quelques rappels simples sur les pullbacks et les univers de Grothendieck. Bien que ces derniers ne fournissent pas une base ensembliste très satisfaisante, nous nous en contenterons.
Le second chapitre est juste une mise en forme la propre possible d'une manière classique de définir les catégories. On peut par exemple ce référer au le livre de Saunders MacLane [3]. Ordinairement une catégorie est composé d'un ensemble d'objets, d'une famille d'ensembles indexée par les couples d'objets dont les éléments forment les morphismes de la catégorie et d'une composition des morphismes vérifiant les axiomes d'identité et l'associativité. En fait tout cela peut être simplifier en ne s'intéressant qu'à l'ensemble des morphismes muni de deux applications, source et but, et d'une composition satisfaisant certains axiomes. Cette construction classique pour les catégories est beaucoup plus difficile à trouver dans la littérature pour les foncteurs et les transformations naturelles. Bien que n'apportant rien de bien nouveau, ce travail est intéressant car il fournit des idées importantes pour toute la suite.
Le chapitre trois est le coeur du mémoire. Ici on définit la notion de groupement qui est tout simplement la généralisation souhaitée. Nous y avons aussi défini les morphismes de groupements que nous avons appelés g-morphismes. L'absence d'identités rend très difficiles la définition adéquate d'une notion de transformations entre g-morphismes. L'un des principaux obstacles est la difficulté de construire des applications source et but sur l'ensemble de telles transformations et donc de parler de composition. Nous avons abordé cette question à la fin du chapitre dans le but de montrer où se situait les obstacles principaux.
Le quatrième chapitre est né de la volonté de trouver un exemple non trivial de groupement. Or l'espace des chemins de Moore d'un espace topologique est trivialement muni d'une composition. Il suffit de juxtaposer les chemins. Cette dernière est bien associative mais ne vérifie pas les conditions identitaires habituellement imposé à une catégorie. Puisque dès le départ nous les avons supprimé de notre théorie, les groupements fournissent un cadre naturel pour l'étude des chemins de Moore. Bien sûr s'il n'y avait que cela, l'intérêt serait limité. Mais il se trouve qu'il est extrêmement facile de généraliser cette construction en dimension supérieure. C'est ce que nous avons fait avec les surfaces et plus généralement les I-espaces de Moore.
Le cinquième chapitre est une tentative pour fournir un cadre assez général pour définir des transformations entre g-morphismes. Ce chapitre n'est pas tout à fait satisfaisant mais je l'espère peut fournir quelques idées intéressantes.
Le dernier chapitre a pour unique but de donner quelques exemples d'ensembles possèdant deux structures différentes de groupements et d'en tirer une définition de 2-groupements.
Je tiens à remercier Bertrand Toen pour m'avoir proposé un sujet portant sur les bicatégories. Bien que ce mémoire semble en être éloigné, il en est la conséquence directe. En effet c'est en essayant de donner une définition dans laquelle on ne ferait plus référence à un ensemble de 0-cellules et à un ensemble de 1-cellules, mais simplement à un unique ensemble de cellules que nous avons été amené à définir catégories, foncteurs et transformations naturelles sans utiliser d'objets. En se faisant, nous avons constater qu'une grande partie de la théorie pouvait être faite sans les conditions identitaires. Et l'exemple des surfaces de Moore et leurs généralisations possibles en dimensions supérieures nous ont convaincus que ce point de vue méritait d'être exposé.
Les mots me manquent pour remercier Carlos Simpson pour le soutien et l'aide qu'il a su m'apporter. Rien n'aurait pu être fait sans ses remarques pertinentes, sa gentillesse et sa patience.

Chapitre 1

Préliminaires ensemblistes

Le seul but de ce chapitre est de rappeler quelques propriétés des pullbacks et surtout de préciser nos notations et le cadre ensembliste dans lequel nous travaillerons.

1.1 Une propriété intéressante des ensembles : le pullback

1.1.1 Définitions et premières propriétés

Les ensembles ont la propriété que si deux applications $f_1 : A_1 \to B$ et $f_2 : A_2 \to B$ ont le même but B alors il existe deux applications $g_1 : C \to A_1$ et $g_2 : C \to A_2$ telles que

1. $f_1 g_1 = f_2 g_2$
2. et si $h_1 : D \to A_1$ et $h_2 : D \to A_2$ sont deux applications vérifiant $f_1 h_1 = f_2 h_2$ alors il existe une unique application $h : D \to C$ satisfaisant $h_1 = g_1 h$ et $h_2 = g_2 h$.

Remarque 1.1.1
Nous utiliserons toujours la notation fg pour parler de la composition des applications f et g. Lorsque nous rencontrerons des compositions différentes de la composition naturelle d'applications d'ensembles nous utiliserons toujours d'autres notations.

Remarque 1.1.2
Une construction peut être donnée en prenant $C = \{(x_1; x_2) \in A_1 \times A_2 \mid f(x_1) = f_2(x_2)\}$ et g_1, g_2 les restrictions des projections canoniques.

Dans le langage des catégories cela signifie que la « catégorie » des ensembles possède des *pullbacks* ou encore que, ci-dessous, le diagramme de gauche peut être compléter pour que le carré de droite soit cartésien.

$$\begin{tikzcd} & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\ A_2 \arrow[r, "f_2"'] & B \end{tikzcd}$$

En fait le pullback n'est pas C comme on le dit bien souvent mais le couple d'application $(g_1; g_2)$. On notera $(g_1; g_2) = \mathrm{PB}(f_1; f_2)$ et $C = A_1 \times_B A_2$. Pour l'instant cette notation veut simplement dire que $(g_1; g_2)$ est **un** pullback de $(f_1; f_2)$. En effet il n'est pas unique au sens fort du terme, mais unique à une bijection près comme cela va être expliqué dans le lemme ci-dessous.

Proposition 1.1.1
Soient $f_1 : A_1 \to B$, $f_2 : A_2 \to B$ et $f_3 : A_3 \to B$ trois applications d'ensembles ayant le même but.

1. *Si $(g_1; g_2) = \mathrm{PB}(f_1; f_2)$ alors $(g_2; g_1) = \mathrm{PB}(f_2; f_1)$;*
2. *Si $(g_1; g_2) = \mathrm{PB}(f_1; f_2)$ et $(h_1; h_2) = \mathrm{PB}(f_1; f_2)$ alors il existe une unique bijection l telle que $h_1 = g_1 l$ et $h_2 = g_2 l$.*
3. *Si $(g_1; g_2) = \mathrm{PB}(f_1; f_2)$, $(g_3; g_4) = \mathrm{PB}(f_2; f_3)$, $(h_1; h_2) = \mathrm{PB}(f_1 g_1; f_3)$ et $(h_3; h_4) = \mathrm{PB}(f_1; f_2 g_3)$, alors il existe une unique bijection*
$$\varphi : A_1 \times_B (A_2 \times_B A_3) \to (A_1 \times_B A_2) \times_B A_3$$
telle que
$$(g_1 h_1)\,\varphi = h_3,\ (g_2 h_1)\,\varphi = g_3 h_4 \text{ et } h_2\varphi = g_4 h_4$$

Démonstration

1. Évident d'après la définition.
2. D'après la première condition sur les pullbacks, $f_1 h_1 = f_2 h_2$. Donc la seconde, implique l'existence de l'application l. De la même façon, il existe une unique application l' telle que $g_1 = h_1 l'$ et $g_2 = h_2 l'$. On en déduit que ll' est une application satisfaisant $h_1 = h_1(ll')$ et $h_2 = h_2(ll')$. D'après la deuxième propriété des pullbacks, une seule application peut satisfaire ces égalités. C'est l'identité. Donc $ll' = \mathrm{Id}$. De même $l'l = \mathrm{Id}$. Ce qui signifie que l est une bijection.
3. Puisque $(g_1; g_2) = \mathrm{PB}(f_1; f_2)$ et $f_1 h_3 = f_2\,(g_3 h_4)$, il existe une unique application φ_1 pour laquelle $g_1\varphi_1 = h_3$ et $g_2\varphi_1 = g_3 h_4$. D'où
$$(f_1 g_1)\,\varphi_1 = f_1\,(g_1\varphi_1) = f_1 h_3 = f_2\,(g_3 h_4) = (f_2 g_3)\,h_4 = (f_3 g_4)\,h_4 = f_3\,(g_4 h_4)$$
Or, par hypothèse, $(h_1; h_2) = \mathrm{PB}(f_1 g_1; f_3)$. Ainsi il existe une unique application φ satisfaisant $\varphi_1 = h_1\varphi$ et $g_4 h_4 = h_2\varphi$. Si nous remontons le raisonnement nous voyons que φ est la seule application vérifiant les égalités $(g_1 h_1)\,\varphi = h_3$, $(g_2 h_1)\,\varphi = g_3 h_4$ et $h_2\varphi = g_4 h_4$.
De même il existe une unique application φ' qui vérifie $h_3\varphi' = g_1 h_1$, $(g_3 h_4)\,\varphi' = g_2 h_1$ et $g_4 h_4 \varphi' = h_2$. Des différentes égalités que nous venons de trouver on déduit
$$h_3\,(\varphi'\varphi) = (g_1 h_1)\,\varphi = h_3,\ g_3\,(h_4\,(\varphi'\varphi)) = (g_2 h_1)\,\varphi = g_3 h_4 \text{ et } g_4\,(h_4\,(\varphi'\varphi)) = h_2\varphi = g_4 h_4$$
Comme $(g_3; g_4) = \mathrm{PB}(f_2; f_3)$, on trouve
$$h_3\,(\varphi'\varphi) = h_3 \text{ et } h_4\,(\varphi'\varphi) = h_4$$
Et finalement $\varphi'\varphi = \mathrm{Id}$ car $(h_3; h_4) = \mathrm{PB}(f_1; f_2 g_3)$. De la même façon $\varphi\varphi' = \mathrm{Id}$. Ce qui montre bien que φ est une bijection. ❑

Par la suite nous considérerons toujours que dans la notation $(g_1; g_2) = \mathrm{PB}(f_1; f_2)$ les applications g_1 et g_2 sont construites comme décrites dans la remarque 1.1.2.

1.1.2 Quelques résultats techniques

Considérons deux applications d'ensembles $s, t : A \to B$. Posons $(\pi_s^t; \pi_t^s) = \mathrm{PB}(s; t)$ et notons $A \times_B A$ le domaine commun à π_s^t et π_t^s.

Remarque 1.1.3
Il peut parfois être commode de voir $A \times_B A$ comme l'ensemble des couples $(x; y) \in A$ vérifiant $s(x) = t(y)$. Et $\pi_s^t\,(x; y) = x$, $\pi_t^s\,(x; y) = y$

Étant donné $(s_1, t_1 : A_1 \to B_1)$ et $(s_2, t_2 : A_2 \to B_2)$ deux couples d'applications d'ensembles, si $f, g : A_1 \to A_2$ sont deux applications d'ensembles telles que

– $s_2 f \pi_{s_1}^{t_1} = t_2 g \pi_{t_1}^{s_1}$ alors il est évident qu'il existe une unique application

$$f \times_c g : A_1 \times_{B_1} A_1 \to A_2 \times_{B_2} A_2$$

satisfaisant

$$\pi_{s_2}^{t_2}\,(f \times_c g) = f \pi_{s_1}^{t_1} \text{ et } \pi_{t_2}^{s_2}\,(f \times_c g) = g \pi_{t_1}^{s_1}$$

– $s_2 f = t_2 g$ alors il existe une unique application

$$\langle f; g \rangle : A_1 \to A_2 \times_{B_2} A_2$$

vérifiant

$$f = \pi_{s_2}^{t_2}\,\langle f; g \rangle \text{ et } g = \pi_{t_2}^{s_2}\,\langle f; g \rangle$$

Remarque 1.1.4
Avec la construction du pullback vue dans la section précédente, on a

$$f \times_c g\,(x; y) = (f(x); g(y)) \qquad \text{et} \qquad \langle f; g \rangle\,(x) = (f(x); g(y))$$

Proposition 1.1.2
On considère $(s_1, t_1 : A_1 \to B_1)$, $(s_2, t_2 : A_2 \to B_2)$ et $(s_3, t_3 : A_3 \to B_3)$ trois couples d'applications d'ensembles.

1. *Soient $f, g : A_1 \to A_2$ et $f', g' : A_2 \to A_3$ quatre applications d'ensembles telles que*

   $$s_2 f \pi_{s_1}^{t_1} = t_2 g \pi_{t_1}^{s_1} \qquad \text{et} \qquad s_3 f' \pi_{s_2}^{t_2} = t_3 g' \pi_{2_1}^{s_2}$$

   Alors $f \times_c g$, $f' \times_c g'$ et $(f' f) \times_c (g' g)$ existent et on a de plus

   $$(f' f) \times_c (g' g) = (f' \times_c g')\,(f \times_c g)$$

2. *Soient $f, g : A_1 \to A_2$ et $f', g' : A_2 \to A_3$ quatre applications d'ensembles telles que*

   $$s_2 f = t_2 g \qquad \text{et} \qquad s_3 f' \pi_{s_2}^{t_2} = t_3 g' \pi_{2_1}^{s_2}$$

   Alors $\langle f; g \rangle$, $f' \times_c g'$ et $\langle f' f; g' g \rangle$ existent et

   $$\langle f' f; g' g \rangle = (f' \times_c g')\,\langle f; g \rangle$$

3. *Soient $f : A_1 \to A_2$ et $g, h : A_2 \to A_3$ trois applications d'ensembles telles que*

$$s_3 g = t_3 h$$

Alors $\langle g; h\rangle$ et $\langle gf; hf\rangle$ existent avec

$$\langle gf; hf\rangle = \langle g; h\rangle f$$

Démonstration Dans chacun des cas, les hypothèses impliquent l'existence de toutes les applications sauf de la dernière.

1. $s_3 (f'f) \pi^{t_1}_{s_1} = s_3 f' \left(f \pi^{t_1}_{s_1}\right) = s_3 f' \pi^{t_2}_{s_2} (f \times_c g) = t_3 g' \pi^{s_2}_{t_2} (f \times_c g) = t_3 g' \left(g \pi^{s_1}_{t_1}\right) = t_3 (g'g) \pi^{s_1}_{t_1}$
   D'où l'existence de $(f'f) \times_c (g'g)$. Par définition c'est la seule application qui vérifie

   $$f'f\pi^{t_1}_{s_1} = \pi^{t_3}_{s_3} ((f'f) \times_c (g'g)) \quad \text{et} \quad g'g\pi^{s_1}_{t_1} = \pi^{s_3}_{t_3} ((f'f) \times_c (g'g))$$

   Or

   $$\pi^{t_3}_{s_3} (f' \times_c g') (f \times_c g) = f'\pi^{t_2}_{s_2} (f \times_c g) = f'f\pi^{t_1}_{s_1}$$

   et

   $$\pi^{s_3}_{t_3} (f' \times_c g') (f \times_c g) = g'\pi^{s_2}_{t_2} (f \times_c g) = g'g\pi^{s_1}_{t_1}$$

   D'où l'égalité recherchée.

2. L'existence de $\langle f'f; g'g\rangle$ est donnée par le calcul

   $$s_3 f'f = s_3 f'\pi^{t_2}_{s_2} \langle f; g\rangle = t_3 g'\pi^{s_2}_{t_2} \langle f; g\rangle = t_3 g'g$$

   Comme

   $$\pi^{t_3}_{s_3} (f' \times_c g') \langle f; g\rangle = f'\pi^{t_2}_{s_2} \langle f; g\rangle = f'f$$
   $$\pi^{s_3}_{t_3} (f' \times_c g') \langle f; g\rangle = g'\pi^{s_2}_{t_2} \langle f; g\rangle = g'g$$

   et que, par définition, $\langle f'f; g'g\rangle$ est la seule application à vérifier ces égalités, on trouve bien le résultat annoncé.

3. Évident. ❏

Proposition 1.1.3
Considérons $s, t : A \to B$ deux applications ayant même source et même but.

1. *A fin de simplifier nos notations, posons*
   – $(g_s; g_t) = \mathrm{PB}(s; t)$,
   – $(f_s; f_t) = \mathrm{PB}(sg_t; t)$ *et*
   – $(h_s; h_t) = \mathrm{PB}(s; tg_s)$
   Alors il existe une unique bijection

   $$\omega : (A \times_B A) \times_B A \to A \times_B (A \times_B A)$$

   qui vérifie les égalités ci-dessous

   $$h_s\omega = g_s f_s, \qquad g_s h_t \omega = g_t f_s \qquad \text{et} \qquad g_t h_t \omega = f_t$$

2. *De plus, si $h_1, h_2, h_3 : C \to A$ sont trois applications d'ensembles telles que*

$$sh_1 = th_2 \qquad \text{et} \qquad sh_2 = th_3$$

alors on peut bien évidemment construire les applications

$$\langle h_1; h_2\rangle : C \to A \times_B A, \qquad \langle h_2; h_3\rangle : C \to A \times_B A$$

et il existe une unique application

$$\langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle : C \to (A \times_B A) \times_B A$$

telle que

$$g_s f_s \langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle = h_1, \quad g_t f_s \langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle = h_2, \quad f_t \langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle = h_3$$

ainsi qu'une unique application

$$\langle h_1; \langle h_2; h_3\rangle\rangle : C \to A \times_B (A \times_B A)$$

vérifiant

$$h_s \langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle = h_1, \quad g_s h_t \langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle = h_2, \quad g_t h_t \langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle = h_3$$

De plus on a la relation

$$\omega \langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle = \langle h_1; \langle h_2; h_3\rangle\rangle$$

3. *Si $A = B$, alors les applications $\langle \mathrm{Id}; s\rangle \times_c \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Id} \times_c \langle t; \mathrm{Id}\rangle$ sont bien définies et*

$$\omega (\langle \mathrm{Id}; s\rangle \times_c \mathrm{Id}) = \mathrm{Id} \times_c \langle t; \mathrm{Id}\rangle$$

Démonstration

1. Puisque $(g_s; g_t) = \mathrm{PB}(s; t)$ et que $s(g_t f_s) = t f_t$ (ou encore $(sg_t) f_s = t f_t$), il existe une unique application ω_1 pour laquelle

$$g_s\omega_1 = g_t f_s \qquad \text{et} \qquad g_t\omega_1 = f_t$$

On a alors

$$(tg_s)\,\omega_1 = t(g_s\omega_1) = t(g_t f_s) = (tg_t) f_s = (sg_s) f_s = s(g_s f_s)$$

Comme $(h_s; h_t) = \mathrm{PB}(s; tg_s)$, on trouve bien l'unique application ω vérifiant

$$h_s\omega = g_s f_s \qquad \text{et} \qquad h_t\omega = \omega_1$$

c'est-à-dire

$$h_s\omega = g_s f_s, \qquad g_s h_t\omega = g_t f_s \qquad \text{et} \qquad g_t h_t\omega = f_t$$

De la même manière, on trouve une unique application ω' telle que

$$f_t\omega' = g_t h_t, \qquad g_t f_s\omega' = g_s h_t \qquad \text{et} \qquad g_s f_s\omega' = h_s$$

Par conséquent $\omega'\omega$ est la seule application à satisfaire les égalités

$$f_t(\omega'\omega) = f_t, \qquad g_t f_s(\omega'\omega) = g_t f_s, \qquad g_s f_s(\omega'\omega) = g_s f_s$$

et $\omega\omega'$ la seule à satisfaire

$$h_s(\omega\omega') = h_s, \qquad g_s h_t(\omega\omega') = g_s h_t, \qquad g_t h_t(\omega\omega') = g_t h_t$$

Ce qui implique $\omega'\omega = \mathrm{Id}$ et $\omega\omega' = \mathrm{Id}$.

2. Rappelons que $\langle h_1; h_2\rangle$ est l'unique application telle que
$$g_s \langle h_1; h_2\rangle = h_1 \quad \text{et} \quad g_t \langle h_1; h_2\rangle = h_2$$
Comme $sg_t \langle h_1; h_2\rangle = sh_2 = th_3$, il existe bien une unique application
$$\langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle : C \to (A \times_B A) \times_B A$$
vérifiant
$$f_s \langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle = \langle h_1; h_2\rangle \quad \text{et} \quad f_t \langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle = h_3$$
D'où l'existence et l'unicité annoncées. De même pour
$$\langle h_1; \langle h_2; h_3\rangle\rangle$$
Or on a
$$h_s\omega \langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle = g_s f_s \langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle = h_1$$
$$g_s h_t\omega \langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle = g_t f_s \langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle = h_2$$
$$g_t h_t\omega \langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle = f_t \langle\langle h_1; h_2\rangle ; h_3\rangle = h_3$$
Par unicité, on obtient la relation voulue.
3. On a
$$s\,\mathrm{Id} = ts, \quad sg_t \langle \mathrm{Id}; s\rangle g_s = ssg_s = sg_s = tg_t = t\,\mathrm{Id}\, g_t$$
D'où l'existence de $\langle \mathrm{Id}; s\rangle \times_c \mathrm{Id}$. On montre aussi facilement l'existence de $\mathrm{Id} \times_c \langle t; \mathrm{Id}\rangle$. Le reste est immédiat d'après les calculs ci-dessous et l'unicité.
$$h_s\omega (\langle \mathrm{Id}; s\rangle \times_c \mathrm{Id}) = g_s f_s (\langle \mathrm{Id}; s\rangle \times_c \mathrm{Id}) = g_s \langle \mathrm{Id}; s\rangle g_s = \mathrm{Id}\, g_s = g_s$$
$$g_s h_t\omega (\langle \mathrm{Id}; s\rangle \times_c \mathrm{Id}) = g_t f_t (\langle \mathrm{Id}; s\rangle \times_c \mathrm{Id}) = g_t \langle \mathrm{Id}; s\rangle g_s = sg_s = tg_t$$
$$g_t h_t\omega (\langle \mathrm{Id}; s\rangle \times_c \mathrm{Id}) = f_t (\langle \mathrm{Id}; s\rangle \times_c \mathrm{Id}) = \mathrm{Id}\, g_t = g_t$$
et
$$h_s (\mathrm{Id} \times_c \langle t; \mathrm{Id}\rangle) = \mathrm{Id}\, g_s = g_s$$
$$g_s h_t (\mathrm{Id} \times_c \langle t; \mathrm{Id}\rangle) = g_s \langle t; \mathrm{Id}\rangle g_t = tg_t$$
$$g_t h_t (\mathrm{Id} \times_c \langle t; \mathrm{Id}\rangle) = g_t \langle t; \mathrm{Id}\rangle g_t = \mathrm{Id}\, g_t = g_t$$

❏

Remarque 1.1.5
Cette proposition est en fait évidente si on pense à $(A \times_c A) \times_c A$ comme étant l'ensemble
$$\{((x; y); z) \mid s(x) = t(y),\ s(y) = t(z)\}$$
et à $A \times_c (A \times_c A)$ comme étant
$$\{(x; (y; z)) \mid s(x) = t(y),\ s(y) = t(z)\}$$
On a alors $\omega\, ((x; y) ; z) = (x; (y; z))$.

Remarque 1.1.6
Bien que l'ensemble $(A_1 \times_B A_2) \times_B A_3$ de la proposition 1.1.1 et l'ensemble $(A \times_B A) \times_B A$ de la proposition 1.1.3 semblent avoir des notations qui peuvent porter à confusion, cela n'est pas le cas car elles ne s'appliquent pas dans les mêmes cas.

1.2 Les univers de Grothendieck

Afin de pouvoir parler de catégorie des ensembles, de catégories des catégories, de catégorie de foncteurs, nous sommes obligé de travailler avec des ensembles « suffisamment petits » mais qui se comportent bien vis-à-vis des opérations usuelles de la théorie des ensembles. C'est ainsi que la notion d'univers a été introduite par Grothendieck.

1.2.1 Définition et premières propriétés

Pour être plus précis, un *univers* est un ensemble $\mathfrak{U}$ vérifiant les axiomes suivants

(U 1) si $x \in \mathfrak{U}$ et $y \in x$, alors $y \in \mathfrak{U}$;

(U 2) si $x \in \mathfrak{U}$ et $y \in \mathfrak{U}$, alors $\{x; y\} \in \mathfrak{U}$;

(U 3) si $I \in \mathfrak{U}$ et si, pour chaque $i \in I$, $x_i \in \mathfrak{U}$, alors $\bigcup_{i \in I} x_i \in \mathfrak{U}$;

(U 4) si $x \in \mathfrak{U}$, alors $\mathscr{P}(x) \in \mathfrak{U}$ où $\mathscr{P}(x)$ est l'ensemble des sous-ensembles de x ;

(U 5) $\omega \in \mathfrak{U}$ où ω n'est autre que l'ensemble des ordinaux finis.

Ces axiomes impliquent les propriétés de stabilité ci-dessous.

Proposition 1.2.1

1. *Si $x \in \mathfrak{U}$, alors $\{x\} \in \mathfrak{U}$.*
2. *Si $x \in \mathfrak{U}$ et $y \in \mathfrak{U}$, alors $(x; y) \in \mathfrak{U}$.*
3. *Si $x \in \mathfrak{U}$ et $y \in \mathfrak{U}$, alors $x \times y \in \mathfrak{U}$.*
4. *Si $x \in \mathfrak{U}$ et $y \subseteq x$, alors $y \in \mathfrak{U}$.*
5. *Si $x \in \mathfrak{U}$ et $y \in \mathfrak{U}$, alors $x^y \in \mathfrak{U}$ où x^y est l'ensemble des applications de y dans x.*
6. *Si $I \in \mathfrak{U}$ et si, pour chaque $i \in I$, $x_i \in \mathfrak{U}$, alors $\bigsqcup_{i \in I} x_i \in \mathfrak{U}$.*
7. *Si $I \in \mathfrak{U}$ et si, pour chaque $i \in I$, $x_i \in \mathfrak{U}$, alors $\prod_{i \in I} x_i \in \mathfrak{U}$.*
8. *Si $x \in \mathfrak{U}$, alors $x \subseteq \mathfrak{U}$.*

Démonstration

1. C'est un cas particulier de l'axiome (U 1).
2. On sait que $(x; y) = \{x; \{x; y\}\}$. Il suffit d'appliquer deux fois l'axiome (U 2).
3. Soit $i \in x$. Pour tout $j \in y$, on vient de voir que $(i; j) \in \mathfrak{U}$. Il s'en suit que $\{(i; j)\} \in \mathfrak{U}$. Comme $y \in \mathfrak{U}$, l'axiome (U 3) nous donne $\bigcup_{j \in y} \{(i; j)\} \in \mathfrak{U}$. De même, on obtient $\bigcup_{i \in x} \bigcup_{j \in y} \{(i; j)\} \in \mathfrak{U}$. Or par définition $\bigcup_{i \in x} \bigcup_{j \in y} \{(i; j)\} = x \times y$.
4. Il suffit de remarquer que $y \in \mathscr{P}(x) \in \mathfrak{U}$ et d'utiliser l'axiome (U 1).
5. Une application de y dans x peut être vue comme un sous-ensemble particulier de $y \times x$. Par conséquent $x^y \subseteq \mathscr{P}(x \times)$. D'après ce que l'on vient de voir, l'ensemble de droite appartient à $\mathfrak{U}$. Le résultat se déduit alors de la propriété précédente.
6. Posons $\overline{x_i} = x \times \{i\}$. Les propriétés ci-dessus nous permettent d'affirmer que $\overline{x_i} \in \mathfrak{U}$. D'après l'axiome (U 3), $\bigcup_{i \in I} \overline{x_i} \in \mathfrak{U}$. Or par définition, $\bigcup_{i \in I} \overline{x_i} = \bigsqcup_{i \in I} x_i$.

7. On peut définir $(u_i)_{i \in I}$ avec $u_i \in x_i$ comme une application de I dans $\bigsqcup_{i \in I} x_i$ telle que l'image de i soit dans x_i. Ainsi $\prod_{i \in I} x_i$ peut être vu comme un sous-ensemble de $(\bigsqcup_{i \in I} x_i)^I$. Les propriétés 4, 5 et 6, nous donne le résultat.
8. D'après l'axiome (U 1), tout élément de x est un élément de $\mathfrak{U}$. Par conséquent, x est une partie de l'univers, $x \subseteq \mathfrak{U}$. ❏

D'après l'axiome (U 5) et toutes les propriétés de stabilité vérifiées par un univers, toutes les constructions mathématiques usuelles peuvent être faites dans un univers. En particuliers les notions d'ensembles quotients, de nombres réels, de limites inductives et projectives peuvent être définies à l'intérieur d'un univers.

1.2.2 Un nouvel axiome

C'est un euphémisme de dire qu'il est très difficile d'exhiber un univers en utilisant uniquement les axiomes de la théorie des ensembles ZFC. Donc afin de pouvoir travailler avec les univers, nous sommes amener à faire l'hypothèse que

$$(\star) \quad \text{« tout ensemble appartient à un univers. »}$$

Ceci fixé, nous pouvons maintenant donner quelques propriétés supplémentaires.

Proposition 1.2.2
Toute intersection d'univers est un univers.

Démonstration Soit $(\mathfrak{U}_i)_{i \in I}$ une famille d'univers. Posons $\mathfrak{U} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{U}_i$. Montrons l'axiome (U 1). Soit $i \in I$. Comme $x \in \mathfrak{U}$, on a $x \in \mathfrak{U}_i$ et $y \in x$. $\mathfrak{U}_i$ étant un univers, on en déduit $y \in \mathfrak{U}_i$. Puisque c'est vrai pour tout $i \in I$, on a $y \in \mathfrak{U}$. Les démonstrations des quatre autres axiomes sont semblables. ❏

Proposition 1.2.3
Si $\mathfrak{U}$ est un univers alors il existe un plus petit univers, que nous noterons $\mathfrak{U}^+$, contenant $\mathfrak{U}$.

Démonstration Conséquence immédiate de la proposition précédente et de l'axiome $(\star)$. ❏
Si $\mathfrak{U}$ est un univers, nous appellerons $\mathfrak{U}$-*ensembles* les sous-ensembles de $\mathfrak{U}$ et *petits* $\mathfrak{U}$-*ensembles* ses éléments.
Pour la suite, choisissons un univers $\mathfrak{U}$ et appellons respectivement ensembles et petits ensembles les $\mathfrak{U}$-ensembles et petits $\mathfrak{U}$-ensembles.

Chapitre 2

Les catégories sans objets

2.1 Idées directrices

Classiquement, une catégorie $\mathbb{C}$ est composée d'un ensemble d'objets $\mathrm{Ob}(\mathbb{C})$, d'un ensemble de morphismes $\mathrm{Mor}(\mathbb{C})$, d'une application source $s : \mathrm{Mor}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$, d'une application but $t : \mathrm{Mor}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ (le t vient de l'anglais *target*), d'une application identité $\mathrm{Id} : \mathrm{Ob}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbb{C})$ et d'une composition $\# : \mathrm{Mor}(\mathbb{C}) \times_O \mathrm{Mor}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbb{C})$ qui à tous morphismes $f : X \to Y$ et $f' : X' \to Y'$ tels que $X' = s(f') = t(f) = Y'$ associe un nouveau morphisme $f' \# f : X \to Y$. Ici nous avons utilisé la représentation usuelle d'un morphisme f par une flèche $f : X \to Y$ quand $s(f) = X$ et $t(f) = Y$. De plus, pour que ces ensembles et applications forment bien une catégorie, ils doivent satisfaire les axiomes suivants :

(associativité) Pour tous morphismes f, g et h vérifiant $s(h) = t(g)$ et $s(g) = t(f)$, on a

$$h \#(g \# h) = (h \# g) \# f$$

(identité) Pour tout objet X, $s(\mathrm{Id}_X) = X$ et $t(\mathrm{Id}_X) = X$. De plus pour tout morphisme f, on a

$$f \# \mathrm{Id}_{s(f)} = f \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_{t(f)} \# f = f$$

Il est a remarqué qu'à chaque objet est associé une unique identité et réciproquement qu'à chaque identité est associée un unique objet. Cette remarque nous amènera, dans la prochaine section, à définir les catégories en supprimant l'ensemble des objets.

Il est évident que les applications source et but se comportent les une par rapport aux autres de la manière suivante :

$$s(\mathrm{Id}\, s) = s \quad ; \quad s(\mathrm{Id}\, t) = t \quad ; \quad t(\mathrm{Id}\, t) = t \quad ; \quad t(\mathrm{Id}\, s) = s$$

Ces égalités et l'identification des objets et identités nous donnerons l'axiome (CAT 1).

En regardant la définition de la composition, on voit que si f et f' sont des morphismes composables alors

$$s(f' \# f) = s(f) \qquad \text{et} \qquad t(f' \# f) = t(f')$$

D'où l'axiome (CAT 2).

Les deux derniers axiomes (CAT 3) et (CAT 4) ne sont respectivement que les axiomes d'identité et d'associativité.

Usuellement un foncteur F entre la catégorie $\mathbb{C}_1$ et la catégorie $\mathbb{C}_2$ est une paire d'applications $F^{\mathrm{Ob}} : \mathrm{Ob}(\mathbb{C}_1) \to \mathrm{Ob}(\mathbb{C}_2)$ et $F^{\mathrm{Mor}} : \mathrm{Mor}(\mathbb{C}_1) \to \mathrm{Mor}(\mathbb{C}_2)$ telles que $F^{\mathrm{Mor}}(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F^{\mathrm{Ob}}(X)}$ et $F^{\mathrm{Mor}}(f' \#_1 f) = F^{\mathrm{Mor}}(f') \#_2 F^{\mathrm{Mor}}(f)$ pour tout objet X et tout couple $(f'; f) \in \mathbb{C}_1 \times_O \mathbb{C}_1$ de morphismes composables. Puisque nous allons identifier objets et identités, nous ne conserverons que l'application des morphismes et les deux conditions précédentes nous donnerons respectivement les axiomes (FONC 1) et (FONC 2).
Le cas des transformations naturelles est plus complexe. C'est même en fait le point de départ de notre travail. Habituellement une transformation naturelle η entre deux foncteurs $F_1, F_2 : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_2$ est une famille de morphismes $\eta_X : F_1^{\mathrm{Ob}}(X) \to F_2^{\mathrm{Ob}}(X)$ indexée par les objets $\mathrm{Ob}(\mathbb{C}_1)$ de la catégorie source $\mathbb{C}_1$ pour laquelle le carré

$$\begin{tikzcd} F_1^{\mathrm{Ob}}(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F_1^{\mathrm{Mor}}(f)"'] & F_2^{\mathrm{Ob}}(X) \arrow[d, "F_2^{\mathrm{Mor}}(f)"] \\ F_1^{\mathrm{Ob}}(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & F_2^{\mathrm{Ob}}(Y) \end{tikzcd}$$

est commutatif pour tout morphisme f de $\mathbb{C}_1$.
Nos catégories n'ayant pas d'objets, nos transformations naturelles ne peuvent pas être définies de cette façon. Nous serons obligé de les définir comme des applications de l'ensemble des morphismes de la catégorie source dans l'ensemble des morphismes de la catégorie but. Mais puisque nos objets sont identifiés avec les identités et que, nous le montrerons dans la dernière section de ce chapitre, l'ensemble de ces dernières n'est autre que l'image de l'application source s, nous leur imposerons l'axiome (NAT 2). De plus en regardant les sources et buts des morphismes de la famille composant la transformation naturelle, nous somme amené à définir l'axiome (NAT 1). Le dernier axiome (NAT 3) n'étant rien d'autre que la traduction de la commutativité du carré ci-dessus.
Cette section n'était qu'une introduction sommaire à ce chapitre. Une étude plus approfondie de la correspondance entre le point de vue classique et le point de vue sans objets sera faite dans la dernière section.

2.2 Les catégories

Partant du principe que les objets peuvent être identifiés avec leurs identités, nous sommes amené à définir une *catégorie* (sans objets) $(\mathbb{B}; s, t, \#)$ comme la donnée
– d'un ensemble $\mathbb{B}$
– de deux applications $s : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, la *source* et $t : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, le *but*,
– et d'une application $\# : \mathbb{B} \times_c \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, la *composition* ,
vérifiant les axiomes suivants

(CAT 1) $ss = s, \qquad st = t, \qquad tt = t \qquad \text{et} \qquad ts = s$

(CAT 2) $s\# = s\pi_t^s : \mathbb{B} \times_c \mathbb{B} \to \mathbb{B} \qquad \text{et} \qquad t\# = t\pi_s^t : \mathbb{B} \times_c \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

(CAT 3) $\#\langle \mathrm{Id}_{\mathbb{B}}; s\rangle = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}}, \qquad \#\langle t; \mathrm{Id}_{\mathbb{B}}\rangle = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}}$

(CAT 4) Avec $\omega : (\mathbb{B} \times_c \mathbb{B}) \times_c \mathbb{B} \to \mathbb{B} \times_c (\mathbb{B} \times_c \mathbb{B})$ la bijection de la proposition 1.1.3, on a

$$\#(\# \times_c \mathrm{Id}_{\mathbb{B}}) = \#(\mathrm{Id}_{\mathbb{B}} \times_c \#)\,\omega : (\mathbb{B} \times_c \mathbb{B}) \times_c \mathbb{B} \to \mathbb{B}$$

Dans cette définition nous parlons des applications $\langle \mathrm{Id}_{\mathbb{B}}; s\rangle$, $\langle t; \mathrm{Id}_{\mathbb{B}}\rangle$, $\mathrm{Id}_{\mathbb{B}} \times_c \#$ et $\# \times_c \mathrm{Id}_{\mathbb{B}}$ sans en avoir vérifié l'existence. Ce qui est immédiat d'après les calculs suivants

$$ts = s = s\,\mathrm{Id}_{\mathbb{B}}, \qquad st = t = t\,\mathrm{Id}_{\mathbb{B}}$$

$$t\,(\#h_t) = tg_s h_t = sh_s = s\,(\mathrm{Id}\,h_s)\,, \qquad s\,(\#\,f_s) = sg_t\,f_s = t\,f_t = t\,(\mathrm{Id}\,f_t)$$

où nous avons utilisé les notations de la proposition 1.1.3 ($g_s = \pi_s^t$ et $g_t = \pi_t^s$).

Remarque 2.2.1
Tout ensemble peut être muni d'une structure de catégorie. En effet si X est un ensemble, il suffit de prendre $s = t = \# = \mathrm{Id}_X$. Cette dernière étant possible car $(\mathrm{Id}; \mathrm{Id}) = \mathrm{PB}\,(\mathrm{Id}; \mathrm{Id})$.

Remarque 2.2.2
Pour être plus rigoureux, nous aurions dû parler de $\mathfrak{U}$-catégorie plutôt que simplement de catégorie.

Une *petite catégorie* $(\mathbb{B}; s; t; \#)$ est une catégorie dont l'ensemble de base $\mathbb{B}$ est un petit ensemble.

Lemme 2.2.1
Une petite catégorie est un élément de l'univers.

Démonstration La démonstration est basée sur la proposition 1.2.1. Supposons que $(\mathbb{B}; s; t; \#)$ soit une petit $\mathfrak{U}$-catégorie. Comme $\mathbb{B}$ est $\mathfrak{U}$-petit, $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ est petit (propriété 3) et donc aussi s, t et $\#$ (propriété 5). Il s'ensuit que le quadrulet $(\mathbb{B}; s; t; \#)$ est un élément de $\mathfrak{U}$ (propriété 7 et axiomes (U 1) et (U 5)). ❏
Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la définition.

Lemme 2.2.2
Si $(\mathbb{B}; s; t; \#)$ *est une catégorie alors si* x *est un élément de* $\mathbb{B}$ *tel que* $s(x) = x$ *ou* $t(x) = x$ *alors* $s(x) = t(x) = x$ *et pour tous* y *et* z *dans* $\mathbb{B}$ *vérifiant* $s(y) = t(x)$ *et* $s(x) = t(z)$*, on a*

$$y\,\#\,x = y \quad \textit{et} \quad x\,\#\,z = z$$

On dit que l'élément x *est une* identité.

Démonstration Si $s(x) = x$, alors $ts(x) = t(x)$. Or $ts(x) = s(x)$ d'après l'axiome (CAT 1). Donc $s(x) = t(x) = x$. De même si $t(x) = x$.
De plus comme $s(y) = t(x)$ et $s(x) = t(z)$, on a, d'après l'axiome (CAT 3),

$$y\,\#\,x = y\,\#\,t(x) = y\,\#\,s(y) = y \quad \text{et} \quad x\,\#\,z = s(x)\,\#\,z = t(z)\,\#\,z = z$$

❏

2.3 Les foncteurs

Un *foncteur* $f : (\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1) \to (\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2)$, souvent noté $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$, est un triplet $(f; (\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1); (\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2))$ où $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ est une application d'ensembles vérifiant les axiomes ci-dessous

(FONC 1) $f s_1 = s_2 f \qquad$ et $\qquad f t_1 = t_2 f$

(FONC 2) $f\#_1 = \#_2\,(f \times_c f) : \mathbb{B}_1 \times_c \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$
L'application $f \times_c f$ existe car $\quad s_2\left(f\pi^{t_1}_{s_1}\right) = f s_1 \pi^{t_1}_{s_1} = f t_1 \pi^{s_1}_{t_1} = t_2\left(f\pi^{s_1}_{t_1}\right)$

Remarque 2.3.1
Il est immédiat que toute application d'ensembles $f : X \to Y$ est un foncteur

$$f : (X; \mathrm{Id}_X; \mathrm{Id}_X; \mathrm{Id}_X) \to (Y; \mathrm{Id}_Y; \mathrm{Id}_Y; \mathrm{Id}_Y)$$

entre les ensembles X et Y munis des structures de catégories vues à la remarque 2.2.1.

Donnons une première conséquence, très classique ,de cette définition.

Lemme 2.3.1
Si $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ est un foncteur de catégories, alors $f(s_1(x))$ et $f(t_1(x))$ sont des identités pour tout $x \in \mathbb{B}_1$.

Démonstration L'axiome (FONC 1) implique

$$f(s_1(x)) = s_2 f(x) \quad \text{et} \quad f(t_1(x)) = t_2 f(x)$$

Or $s_2 s_2 = s_2$ et $t_2 t_2 = t_2$. Le résultat découle alors directement du lemme 2.2.2. ❏

Proposition 2.3.2
– *Si $(\mathbb{B}; s; t)$ est un catégorie, l'application identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{B}}$ définit un foncteur aussi noté $\mathrm{Id}_{\mathbb{B}}$.*
– *Si $f_1 : (\mathbb{B}_1; s_1; t_1) \to (\mathbb{B}_2; s_2; t_2)$ et $f_2 : (\mathbb{B}_2; s_2; t_2) \to (\mathbb{B}_3; s_3; t_3)$ sont deux foncteurs alors la fonction d'ensembles $f_2 f_1$ définit elle aussi un foncteur*

$$f_2 \bullet f_1 : (\mathbb{B}_1; s_1; t_1) \to (\mathbb{B}_3; s_3; t_3)$$

Démonstration
– Évident.
– En effet on a

$$(f_2 f_1)\, s_1 = f_2 s_2 f_1 = s_3\,(f_2 f_1)\,, \qquad (f_2 f_1)\, t_1 = f_2 t_2 f_1 = t_3\,(f_2 f_1)$$

et

$$(f_2 f_1)\,\#_1 = f_2\#_2\,(f_1 \times_c f_1) = \#_3\,(f_2 \times_c f_2)\,(f_1 \times_c f_1) = \#_3\,((f_2 f_1) \times_c (f_2 f_1))$$

d'après la proposition 1.1.2. ❏

Lemme 2.3.3
Si $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ est un $\mathfrak{U}$-foncteur entre les petites $\mathfrak{U}$-catégories $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ alors c'est un élément de l'univers $\mathfrak{U}$.

Démonstration La démonstration est semblable à celle du lemme 2.2.1. ❏
Posons
– $\mathscr{F}\mathfrak{onc}$ l'ensemble des *petits foncteurs* (foncteurs entre petites catégories),
– $s : \mathscr{F}\mathfrak{onc} \to \mathscr{F}\mathfrak{onc},\ s\,(f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1}$
$t : \mathscr{F}\mathfrak{onc} \to \mathscr{F}\mathfrak{onc},\ t\,(f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}$
– $\bullet : \mathscr{F}\mathfrak{onc} \times_c \mathscr{F}\mathfrak{onc} \to \mathscr{F}\mathfrak{onc},\ \bullet\,(f_2; f_1) = f_2 \bullet f_1$

Théorème 2.3.4
($\mathscr{F}\mathfrak{onc}$; s; t; $\bullet$) est une catégorie.

Démonstration Les trois premiers axiomes sont évidents et (CAT 4) se déduit immédiatement de l'associativité des applications d'ensembles. ❏

2.4 Les transformations naturelles

Une *transformation naturelle* $\eta : (f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) \rightsquigarrow (f_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)$ est un triplet

$$(\eta : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2; (f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2); (f_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2))$$

où $\eta : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ est une application d'ensembles telle que

(NAT 1) $s_2\eta s_1 = s_2 f_1$ et $t_2\eta s_1 = s_2 f_2$

(NAT 2) $\eta = \eta s_1$

(NAT 3) $\#_2 \langle f_2; \eta s_1\rangle = \#_2 \langle \eta t_1; f_1\rangle$

Pour simplifier, nous noterons souvent $\eta : f_1 \rightsquigarrow f_2$.

Lemme 2.4.1
L'axiome (NAT 1) est équivalent à l'axiome suivant

(NAT 1') $s_2\eta t_1 = t_2 f_1$ et $t_2\eta t_1 = t_2 f_2$

Démonstration Supposons que l'axiome (NAT 1) soit vrai. D'après les axiomes (CAT 1) et (FONC 1), on a

$$s_2\eta t_1 = s_2\eta s_1 t_1 = s_2 f_1 t_1 = s_2 t_2 f_1 = t_2 f_1 \qquad \text{et} \qquad t_2\eta t_1 = t_2\eta s_1 t_1 = s_2 f_2 t_1 = s_2 t_2 f_2 = t_2 f_2$$

La même démonstration marche dans l'autre sens. ❏
Ce lemme implique que les applications $\langle f_2; \eta s_1\rangle$ et $\langle \eta t_1; f_1\rangle$ existent puisque c'est équivalent à dire

$$s_2 f_2 = t_2(\eta s_1) \qquad \text{et} \qquad s_2(\eta t_1) = t_2 f_2$$

Remarque 2.4.1
Si nous observons cette preuve, nous avons juste utilisé la condition (NAT 1). En fait (NAT 2) est utile pour assurer une certaine forme d'unicité qui sera nécessaire plus tard pour définir une composition des transformations naturelles (voir la proposition 2.4.3).

Proposition 2.4.2
Si $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ est un foncteur, alors $f s_1$ est une transformation naturelle de f dans lui-même.

Démonstration

(NAT 1) $s_2 (f s_1) s_1 = s_2 s_2 f s_1 = s_2 (f s_1)$ et $t_2 (f s_1) s_1 = t_2 s_2 f s_1 = s_2 (f s_1)$

(NAT 2) $(f s_1) s_1 = f s_1$

(NAT 3) $\#_2 \langle f; (f s_1) s_1\rangle = \#_2 \langle f; f s_1\rangle = \#_2 \langle \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} f; s_2 f\rangle = \#_2 \langle \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}; s_2\rangle f = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} f = f$
et $\#_2 \langle (f s_1) t_1; f\rangle = \#_2 \langle f t_1; f\rangle = \#_2 \langle t_2 f; \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} f\rangle = \#_2 \langle t_2; \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}\rangle f = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} f = f$ ❏

Proposition 2.4.3
Si
$$\eta_1 : (f_1 : (\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1) \to (\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2)) \rightsquigarrow (f_2 : (\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1) \to (\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2))$$
et
$$\eta_2 : (f_2 : (\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1) \to (\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2)) \rightsquigarrow (f_3 : (\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1) \to (\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2))$$
sont deux transformations naturelles, alors l'application d'ensembles $\langle \eta_2; \eta_1 \rangle$ *existe et l'application* $\#_2 \langle \eta_2; \eta_1 \rangle$ *définit une transformation naturelle de* f_1 *dans* f_3.

Démonstration
– Pour démontrer l'existence de $\langle \eta_2; \eta_1 \rangle$, il suffit de prouver que $s_2\eta_2 = t_2\eta_1$. Ce qui est fait ci-dessous en utilisant l'axiome (NAT 2).

$$s_2\eta_2 = s_2\eta_2 s_1 = s_2 f_2 \qquad \text{et} \qquad t_2\eta_1 = t_2\eta_1 s_1 = s_2 f_2$$

– Il nous reste à prouver que $\#_2 \langle \eta_2; \eta_1 \rangle$ est une application naturelle de f_1 vers
  (NAT 1) $s_2\#_2 \langle \eta_2; \eta_1 \rangle s_1 = s_2\pi^{s_2}_{t_2} \langle \eta_2; \eta_1 \rangle s_1 = s_2\eta_1 s_1 = s_2 f_1$
  et $t_2\#_2 \langle \eta_2; \eta_1 \rangle s_1 = t_2\pi^{t_2}_{s_2} \langle \eta_2; \eta_1 \rangle s_1 = t_2\eta_2 s_1 = s_2 f_3$
  (NAT 2) $\#_2 \langle \eta_2; \eta_1 \rangle s_1 = \#_2 \langle \eta_2 s_1; \eta_1 s_1 \rangle = \#_2 \langle \eta_2; \eta_1 \rangle$
  (NAT 3) Conséquence des calculs suivants

$$\begin{aligned}
\#_2 \langle f_3; \#_2 \langle \eta_2; \eta_1 \rangle s_1 \rangle &= \#_2 \langle f_3; \#_2 \langle \eta_2 s_1; \eta_1 s_1 \rangle\rangle \\
&= \#_2 (\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} \times_c \#_2) \langle f_3; \langle \eta_2 s_1; \eta_1 s_1 \rangle\rangle \\
&= \#_2 (\#_2 \times_c \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2})\, \omega^{-1} \langle f_3; \langle \eta_2 s_1; \eta_1 s_1 \rangle\rangle \\
&= \#_2 (\#_2 \times_c \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}) \langle\langle f_3; \eta_2 s_1 \rangle ; \eta_1 s_1 \rangle \\
&= \#_2 \langle \#_2 \langle f_3; \eta_2 s_1 \rangle ; \eta_1 s_1 \rangle \\
&= \#_2 \langle \#_2 \langle \eta_2 t_1; f_2 \rangle ; \eta_1 s_1 \rangle \\
&= \#_2 (\#_2 \times_c \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}) \langle\langle \eta_2 t_1; f_2 \rangle ; \eta_1 s_1 \rangle \\
&= \#_2 (\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} \times_c \#_2)\, \omega \langle\langle \eta_2 t_1; f_2 \rangle ; \eta_1 s_1 \rangle \\
&= \#_2 (\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} \times_c \#_2) \langle \eta_2 t_1; \langle f_2; \eta_1 s_1 \rangle\rangle \\
&= \#_2 \langle \eta_2 t_1; \#_2 \langle f_2; \eta_1 s_1 \rangle\rangle \\
&= \#_2 \langle \eta_2 t_1; \#_2 \langle \eta_1 t_1; f_1 \rangle\rangle \\
&= \#_2 (\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} \times_c \#_2) \langle \eta_2 t_1; \langle \eta_1 t_1; f_1 \rangle\rangle \\
&= \#_2 (\#_2 \times_c \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2})\, \omega^{-1} \langle \eta_2 t_1; \langle \eta_1 t_1; f_1 \rangle\rangle \\
&= \#_2 (\#_2 \times_c \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}) \langle\langle \eta_2 t_1; \eta_1 t_1 \rangle ; f_1 \rangle \\
&= \#_2 \langle \#_2 \langle \eta_2 t_1; \eta_1 t_1 \rangle ; f_1 \rangle \\
&= \#_2 \langle \#_2 \langle \eta_2; \eta_1 \rangle t_1; f_1 \rangle
\end{aligned}$$

❏

Lemme 2.4.4
Une petite transformation naturelle *(transformation naturelle entre petits foncteurs) est un élément de l'univers.*

Démonstration La démonstration est semblable à celle du lemme 2.2.1. ❑

On peut donc considérer

– $\mathcal{N}\mathfrak{at}$ l'ensemble des *petites transformations naturelles*,

– $s : \mathcal{N}\mathfrak{at} \to \mathcal{N}\mathfrak{at},\ s(\eta : f_1 \rightsquigarrow f_2) = f_1 s_1$
  $t : \mathcal{N}\mathfrak{at} \to \mathcal{N}\mathfrak{at},\ t(\eta : f_1 \rightsquigarrow f_2) = f_2 s_1$

– $\star : \mathcal{N}\mathfrak{at} \times_c \mathcal{N}\mathfrak{at} \to \mathcal{N}\mathfrak{at},\ \star(\eta_2, \eta_1) = \eta_2 \star \eta_1 = \#_2 \langle \eta_2; \eta_1 \rangle$
  où $\mathcal{N}\mathfrak{at} \times_c \mathcal{N}\mathfrak{at} = \{(\eta_2; \eta_1) \in \mathcal{N}\mathfrak{at} \times \mathcal{N}\mathfrak{at} \mid s\eta_2 = t\eta_1\}$.

Théorème 2.4.5
$(\mathcal{N}\mathfrak{at}; s; t; \star)$ est une catégorie.

Démonstration

(CAT 1) $ss(\eta) = s(f_1 s_1) = f_1 s_1 = s(\eta)$, $\qquad st(\eta) = s(f_2 s_1) = f_2 s_1 = t(\eta)$
$tt(\eta) = t(f_2 s_1) = f_2 s_1 = t(\eta)$, $\qquad ts(\eta) = s(f_1 s_1) = f_1 s_1 = s(\eta)$

(CAT 2) $s \star (\eta_2; \eta_1) = s\#_2 \langle \eta_2; \eta_1 \rangle = f_1 s_1 = s(\eta_1) = s\pi_t^s(\eta_2; \eta_1)$
$t \star (\eta_2; \eta_1) = t\#_2 \langle \eta_2; \eta_1 \rangle = f_3 s_1 = t(\eta_2) = t\pi_s^t(\eta_2; \eta_1)$

(CAT 3) On a

$$\begin{aligned}
\star \langle \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}; s \rangle (\eta) = \star(\eta; s\eta) &= \#_2 \langle \eta; s\eta \rangle \\
&= \#_2 \langle \eta; f_1 s_1 \rangle \\
&= \#_2 \langle \eta; s_2 f_1 \rangle \\
&= \#_2 \langle \eta; s_2 \eta s_1 \rangle = \#_2 \langle \eta; s_2 \eta \rangle = \#_2 \langle \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}; s_2 \rangle (\eta) = \eta
\end{aligned}$$

et de même $\star \langle t; \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} \rangle (\eta) = \eta$.

(CAT 4) Finalement

$$\begin{aligned}
\star(\star \times_c \mathrm{Id}_{\mathcal{N}\mathfrak{at}})((\eta_3; \eta_2); \eta_1) &= \star(\star(\eta_3; \eta_2); \eta_1) \\
&= \#_2 \langle \#_2 \langle \eta_3; \eta_2 \rangle; \eta_1 \rangle \\
&= \#_2 (\#_2 \times_c \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}) \langle \langle \eta_3; \eta_2 \rangle; \eta_1 \rangle \\
&= \#_2 (\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} \times_c \#_2)\, \omega \langle \langle \eta_3; \eta_2 \rangle; \eta_1 \rangle \\
&= \#_2 (\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} \times_c \#_2) \langle \eta_3; \langle \eta_2; \eta_1 \rangle \rangle \\
&= \#_2 \langle \eta_3; \#_2 \langle \eta_2; \eta_1 \rangle \rangle \\
&= \star(\eta_3; \star(\eta_2; \eta_1)) \\
&= \star(\mathrm{Id}_{\mathcal{N}\mathfrak{at}} \times_c \star)(\eta_3; (\eta_2; \eta_1)) \\
&= \star(\mathrm{Id}_{\mathcal{N}\mathfrak{at}} \times_c \star)\, \omega((\eta_3; \eta_2); \eta_1)
\end{aligned}$$

❑

La proposition suivante montre l'un des intérêts du point de vue que nous avons adopté.

Proposition 2.4.6
Soient $\eta : (f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) \rightsquigarrow (f_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)$ une application naturelle et $g : (\mathbb{A}; s; t; \#) \to (\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1)$, $h : (\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2) \to (\mathbb{C}; s'; t'; \#')$ deux foncteurs. L'application d'ensembles $h\eta g : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ est en fait une transformation naturelle du foncteur $h \bullet f_1 \bullet g$ vers le foncteur $h \bullet f_2 \bullet g$.

Démonstration Vérifions les trois axiomes

(NAT 1) On a

$$s'(h\eta g)\,s = hs_2\eta s_1 g = hs_2 f_1 g = s'(h \bullet f_1 \bullet g)$$
$$t'(h\eta g)\,s = ht_2\eta s_1 g = hs_2 f_2 g = s'(h \bullet f_2 \bullet g)$$

(NAT 2) $(h\eta g)\,s = h\eta s_1 g = h\eta g$

(NAT 3) On a

$$\begin{aligned}
\#'\langle h \bullet f_2 \bullet g; h\eta g s\rangle &= \#'\langle hf_2 g; h\eta s_1 g\rangle \\
&= \#'(h \times_c h)\langle f_2; \eta s_1\rangle g \\
&= h\#_2\langle f_2; \eta s_1\rangle g \\
&= h\#_2\langle \eta t_1; f_1\rangle g \\
&= \#'(h \times_c h)\langle \eta t_1; f_1\rangle g \\
&= \#'\langle h\eta t_1 g; hf_1 g\rangle \\
&= \#'\langle h\eta g t; hf_1 g\rangle \\
&= \#'\langle h\eta g t; h \bullet f_1 \bullet g\rangle
\end{aligned}$$

❏

2.5 Relation avec les notions habituelles

2.5.1 Catégorie « classique » associée à une catégorie « sans objets »

Soit $(\mathbb{B}; s; t)$ une catégorie « sans objet ». Parmi les éléments de $\mathbb{B}$, certains jouent un rôle particulier : les identités.
Par définition, $x \in \mathbb{B}$ est une identité si pour tous éléments y et z de $\mathbb{B}$ tels que $s(y) = t(x)$ et $s(x) = t(z)$, on a $y\#x = y$ et $x\#z = z$. Notons $\mathrm{Id}(\mathbb{B})$ l'ensemble des identités de $\mathbb{B}$.
Bien que nous n'en ayons besoin que plus tard, nous pouvons maintenant définir la notion d'éléments inversible. On dit que $x \in \mathbb{B}$ est inversible quand il existe $y \in \mathbb{B}$ tel que $x\#y \in \mathrm{Id}(\mathbb{B})$ et $y\#x \in \mathrm{Id}(\mathbb{B})$.

Lemme 2.5.1
Si pour toute application $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, on pose

$$\mathrm{Im}(f) = \{x \in \mathbb{B} \mid \exists y \in \mathbb{B}, f(y) = x\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{B} \mid f(x) = x\}$$

alors on a

$$\mathrm{Id}(\mathbb{B}) = \mathrm{Im}(s) = \mathrm{Im}(t) = \mathrm{Fix}(s) = \mathrm{Fix}(t)$$

Démonstration Comme $st = t$ et $ts = s$, on a $\mathrm{Im}(t) \subseteq \mathrm{Im}(s)$ et $\mathrm{Im}(s) \subseteq \mathrm{Im}(t)$.
Il est clair que $\mathrm{Fix}(s) \subseteq \mathrm{Im}(s)$ et $\mathrm{Fix}(t) \subseteq \mathrm{Im}(t)$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(s)$. On peut écrire $x = s(y)$ avec $y \in \mathbb{B}$. On a ainsi $s(x) = ss(y) = s(y) = x$. Donc $\mathrm{Im}(s) \subseteq \mathrm{Fix}(s)$ et de même $\mathrm{Im}(t) \subseteq \mathrm{Fix}(t)$.
Il ne nous reste plus qu'à prouver $\mathrm{Id}(\mathbb{B}) = \mathrm{Fix}(s)$.
Si $x \in \mathrm{Id}(\mathbb{B})$, alors $x\#s(x) = s(x)$. Or d'après l'axiome (CAT 3), on a $x\#s(x) = x$. D'où $s(x) = x$.

C'est-à-dire $\mathrm{Id}(\mathbb{B}) \subseteq \mathrm{Fix}(s)$.
De plus on vient de voir que si x appartient à $\mathrm{Fix}(s)$, alors $x = s(x) = t(x)$. Donc d'après l'axiome (CAT 3), x est une identité. ❑

Nous pouvons maintenant définir une catégorie au sens classique du terme en prenant les données suivantes :

– $\mathrm{Ob} = \mathrm{Id}(\mathbb{B})$,
– Pour tout $(x; y) \in \mathrm{Ob}^2$,

$$\mathrm{Mor}_{\mathbb{B}}(x; y) = \{f \in \mathbb{B} \mid s(f) = x,\ t(f) = y\}$$

– Pour chaque $x \in \mathrm{Ob}$,

$$\mathrm{Id}_x = x \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{B}}(x; x)$$

– Pour tout triplet $(x; y; z) \in \mathrm{Ob}^3$,

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{Mor}_{\mathbb{B}}(y; z) \times \mathrm{Mor}_{\mathbb{B}}(x; y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathbb{B}}(x; z) \\ (f; g) &\longmapsto f \circ g = f\#g \end{aligned}$$

Cette dernière est bien définie car $s(f) = x = t(g)$

En effet les axiomes sont satisfaits

(identité) Si $f : x \to y$ pour tout $(x; y) \in \mathrm{Ob}^2$, alors

$$f \circ \mathrm{Id}_x = f\#x = f \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_y \circ f = y\#f = f$$

d'après la définition même de $\mathrm{Id}(\mathbb{B})$.

(associativité) Si $f : z \to y$, $g : y \to x$ et $h : x \to v$ sont trois morphismes quelconques, alors

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ h &= \#(\# \times_c \mathrm{Id}_{\mathbb{B}})((f; g); h) \\ &= \#(\mathrm{Id}_{\mathbb{B}} \times_c \#)\,\omega((f; g); h) \\ &= \#(\mathrm{Id}_{\mathbb{B}} \times_c \#)(f; (g; h)) \\ &= f \circ (g \circ h) \end{aligned}$$

2.5.2 Catégorie « sans objets » associée à une catégorie « classique »

Soit $\mathbb{C}$ une catégorie classique dont la composition est notée $\circ$. On définit une catégorie « sans objets » $(\mathbb{B}; s; t; \#)$ en prenant

– $\mathbb{B} = \bigcup_{(x;y)\in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})^2} \mathrm{Mor}_{\mathbb{C}}(x; y)$
– $s : \mathbb{B} \to \mathbb{B},\ s(f : x \to y) = \mathrm{Id}_x$
  $t : \mathbb{B} \to \mathbb{B},\ t(f : x \to y) = \mathrm{Id}_y$
– $\# : \mathbb{B} \times_c \mathbb{B} \to \mathbb{B},\ \#(f; g) = f \circ g$
  où $f \circ g$ est bien définie car $\mathrm{Id}_y = s(f : y \to z) = t(g : x \to y') = \mathrm{Id}_{y'}$, i.e. $y = y'$.

Les axiomes sont satisfaits

(CAT 1) Évident.

(CAT 2) Si $(f : z \to y; g : x \to y) \in \mathbb{B} \times_c \mathbb{B}$ alors

$$s\#(f; g) = s(f \circ g) = x \quad \text{et} \quad s\pi_s^t(f; g) = s(g) = x$$

$$t\#(f; g) = t(f \circ g) = z \quad \text{et} \quad t\pi_t^s(f; g) = t(f) = z$$

(CAT 3) Soit $f : x \to y \in \mathbb{B}$.

$$\#\langle \mathrm{Id}_{\mathbb{B}}; s\rangle (f) = \#(f; \mathrm{Id}_x) = f \circ \mathrm{Id}_x = f = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}}(f)$$

$$\#\langle t; \mathrm{Id}_{\mathbb{B}}\rangle (f) = \#(\mathrm{Id}_y; f) = \mathrm{Id}_y \circ f = f = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}}(f)$$

(CAT 4) Soit $((f; g); h) \in (\mathbb{B} \times_c \mathbb{B}) \times_c \mathbb{B}$. On a

$$\#(\# \times_c \mathrm{Id})((f; g); h) = (f \circ g) \circ h$$

et

$$\#(\mathrm{Id} \times_c \#)\, \omega\, ((f; g); h) = \#(\mathrm{Id} \times_c \#)(f; (g; h)) = f \circ (g \circ h)$$

or $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

2.5.3 Les foncteurs

Soit $f : (\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1) \to (\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2)$ un foncteur de catégories « sans objets ». Les données suivantes

– pour chaque $x \in \mathrm{Ob}_1 = \mathrm{Id}(\mathbb{B}_1)$,

$$F(x) = f(x) \in \mathrm{Ob}_2 = \mathrm{Id}(\mathbb{B}_2)$$

C'est bien défini car $f(x) = f(s_1(s(x))) = s_2 f(x) \in \mathrm{Im}(s_2) = \mathrm{Ob}_2$.

– pour chaque $u \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{B}_1}(x; y)$,

$$F(u) = f(u) \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{B}_2}(F(x); F(y))$$

car $s_2(f(u)) = f(s_1(u)) = f(x)$ et $t_2(f(u)) = f(t_1(u)) = f(y)$.

définissent bien un foncteur car

– pour tout $x \in \mathrm{Ob}_1$,

$$F(\mathrm{Id}_x) = f(x) = \mathrm{Id}_{f(x)} = \mathrm{Id}_{F(x)}$$

– et pour tous morphismes $u : y \to z$, $v : x \to y$,

$$F(u \circ_1 v) = f(u \#_1 v) = f(u) \#_2 f(v) = F(u) \circ_2 F(v)$$

Soit $F : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_2$ un foncteur de catégories « classiques ». La fonction d'ensembles $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ donnée par

$$f(u) = F(u) \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{C}_1}(F(x); F(y)) \subseteq \mathbb{B}_2$$

pour tout $u \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{C}_1}(x; y)$, est un foncteur de catégories « sans objets ».

(FONC 1) pour $u \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{C}_1}(x; y)$,

$$f(s_1(u)) = f(\mathrm{Id}_x) = F(\mathrm{Id}_x) = \mathrm{Id}_{F(x)} = s_2(F(u)) = s_2 f(u)$$

De même $f(t_1(u)) = t_2(f(u))$.

(FONC 2) pour $(u; v) \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{C}_1}(y; z) \times \mathrm{Mor}_{\mathbb{C}_1}(x; y)$,

$$\#_2(f \times_c f)(u; v) = \#_2(f(u); f(v)) = F(u) \circ_2 F(v) = F(u \circ_1 v) = f \#_1(u; v)$$

2.5.4 Les transformations naturelles

Les calculs étant toujours les mêmes, nous nous contenterons ici de donner les constructions.
Soit $\eta : (f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) \rightsquigarrow (f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)$ une transformation naturelle (de catégories « sans objets »). On obtient une transformation naturelle $\Xi : F_1 \rightsquigarrow F_2$ en prenant pour tout objet $x \in \mathrm{Ob}_1$

$$\Xi_x = \eta(x) \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{C}_2}(F_1(x); F_2(x))$$

Et si $\Xi : (F_1 : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_2) \rightsquigarrow (F_2 : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_2)$ est une transformation naturelle (de catégories « classiques »), alors la fonction d'ensembles $\eta : f_1 \to f_2$ donnée par

$$\eta(u) = \Xi(x) \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{C}_2}(F_1(x); F_2(x)) \subseteq \mathbb{B}_2$$

pour $u \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{C}_1}(x; y) \subseteq \mathbb{B}_1$, est une transformation naturelle.

Chapitre 3

Les groupements

3.1 Les origines

En lisant le chapitre précédent, une première évidence s'impose : L'utilisation du pull-back complique la théorie. Quitte à perdre sur l'unicité, rien ne nous empêche d'étendre la composition # à l'ensemble produit $\mathbb{B}\times\mathbb{B}$. Ce qui nous donne les définitions suivantes pour les catégories, foncteurs et transformations naturelles :

– Une catégorie $(\mathbb{B}; s; t; \#)$ est un ensemble $\mathbb{B}$ muni de trois applications
  – $s : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$,
  – $t : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$,
  – et $\# : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$,

  telles que les axiomes suivants soient satisfaits :

  (CAT 1) $ss = s, \quad st = t, \quad tt = t, \quad ts = s\,;$

  (CAT 2) Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{B}$ satisfaisant $s(x) = t(y)$ alors

  $$s\,(x\,\#\,y) = s(y) \quad \text{et} \quad t\,(x\,\#\,y) = t(x)$$

  (CAT 3) pour tout $x \in \mathbb{B}$ alors $x\,\#\,s(x) = x$ et $t(x)\,\#\,x = x\,;$

  (CAT 4) si x, y, z sont trois éléments de $\mathbb{B}$ tels que $s(x) = t(y)$ et $s(y) = t(z)$, alors

  $$(x\,\#\,y)\,\#\,z = x\,\#\,(y\,\#\,z)$$

– Un foncteur f entre la catégorie $(\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1)$ et la catégorie $(\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2)$ est un triplet $((\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1); (\mathbb{B}_2; s_2; t$ souvent noté $f : (\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1) \longrightarrow (\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2)$, où f est une application d'ensembles $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ vérifiant les axiomes

  (FONC 1) $f s_1 = s_2 f, \quad f t_1 = t_2 f\,;$

  (FONC 2) si x et y sont deux éléments de $\mathbb{B}_1$ tels que $s(x) = t(y)$, alors

  $$f\,(x\,\#_1\,y) = f(x)\,\#_2\,f(y)$$

– Une application naturelle $\eta : f_1 \rightsquigarrow f_2$ entre le foncteur f_1 et le foncteur f_2 est un triplet $(\eta; f_1; f_2)$ où $\eta : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ une application d'ensembles satisfaisant les trois axiomes ci-dessous

(NAT 1) $s_2\eta s_1 = f_1 s_1, \quad t_2\eta s_1 = f_2 s_1$;

(NAT 2) $\eta = \eta s_1$.

(NAT 3) pour tout x dans $\mathbb{B}_1$, on a $\quad f_2(x)\,\#_2\,\eta\,(s_1(x)) = \eta\,(t_1(x))\,\#_2\,f_1(x)$;

D'après la remarque 2.4.1, l'axiome (NAT 2) ne semble par très naturelle. Pour être plus précis il n'a été utilisé que pour assurer l'existence de la composition $\#\langle\eta_1;\eta_2\rangle$ et assurer la véracité de l'axiome (CAT 3) pour la catégorie $\mathscr{N}\mathfrak{at}$.
En fait comme nous l'avons déjà dit, l'axiome (NAT 2) permet de réduire le nombre de transformations naturelles en identifiant celles qui nous semblent avoir les mêmes propriétés. Un moment de réflexion, nous amène à penser que l'axiome (CAT 3) des catégories joue un rôle très semblable. Il nous sert à identifier les objets et les identités. C'est-à-dire à identifier les catégories qui ont les mêmes identités. C'est la supression de ces deux axiomes qui nous pousse à introduire la notion de groupement.

3.2 Définition d'un groupement

On définit un *groupement* $(\mathbb{B}; s; t; \#)$ comme étant un ensemble $\mathbb{B}$ muni de trois applications
– $s : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, la *source*,
– $t : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, le *but*,
– et $\# : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, la *composition*,
telles que les axiomes suivants soient satisfaits :

(GR 1) $ss = s, \quad st = t, \quad tt = t, \quad ts = s$;

(GR 2) Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{B}$ satisfaisant $s(x) = t(y)$ alors

$$s\,(x\,\#\,y) = s(y) \quad \text{et} \quad t\,(x\,\#\,y) = t(x)$$

(GR 3) si x, y, z sont trois éléments de $\mathbb{B}$ tels que $s(x) = t(y)$ et $s(y) = t(z)$, alors

$$(x\,\#\,y)\,\#\,z = x\,(y\,\#\,z)$$

Exemple 3.2.1
Étant donné que notre objectif est de généraliser légèrement la théorie de catégories, il est normal que celle-ci soient des groupements. Les axiomes (CAT 1), (CAT 2) et (CAT 4) sont mot pour mot les trois axiomes (GR1), (GR2) et (GR3).

Exemple 3.2.2
Soit $(M; \bullet)$ un monoïde non vide. Choisissons un élément c quelconque dans M et notons $\breve{c}$ l'application constante de M dans lui-même qui a tout élément associe c. Il est immédiat que $(M; \breve{c}; \breve{c}; \bullet)$ est un groupement. Il est aussi à remarquer que l'on peut ainsi associer au monoïde $(M; \bullet)$ un grand nombre de groupements.

Remarque 3.2.1
Dans l'exemple précédent, si le monoïde est un groupe $(G; \bullet; e)$ d'élément neutre e, alors on peut prendre e à la place de c. Clairement $(G; \breve{e}; \breve{e}; \bullet)$ est un groupement. De plus on vérifie aisément que c'est une catégorie. C'est d'ailleurs de cette manière que l'on montre habituellement que les groupes sont des exemples de catégorie.

Un groupement est dit *petit* si $\mathbb{B}$ est un petit ensemble.

Remarque 3.2.2
Pour être plus précis nous devrions parler de $\mathfrak{U}$-*groupements* et de *petits* $\mathfrak{U}$-*groupements*.

Lemme 3.2.1
Un petit $\mathfrak{U}$-*groupement est un élément de l'univers* $\mathfrak{U}$.

Démonstration La démonstration est semblable à celle du lemme 2.2.1. ❑
Il est à remarquer dans la définition des groupements, qu'il y a une certaine symétrie entre le rôle de l'application source et celui de l'application but. La seule différence se situe au niveau de la composition. Soyons plus précis en prenant un groupement $(\mathbb{B}; s; t; \#)$. Il est aisé de montrer que le quadruplet $(\mathbb{B}^*; s^*; t^*; \#^*)$, où $\mathbb{B}^* = \mathbb{B}$, $s^* = t$, $t^* = s$ et $x \#^* y = y \# x$ pour tous x et y dans $\mathbb{B}^*$, est un groupement.

(GR 1) On a $s^*s^* = tt = t = s^*$. De même $\quad s^*t^* = t^*, \quad t^*t^* = t^*, \quad t^*s^* = s^*$.

(GR 2) Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{B}^* = \mathbb{B}$ satisfaisant $s^*(x) = t^*(y)$ alors

$$s^*(x \#^* y) = t(y \# x) = t(y) = s^*(y) \quad \text{et} \quad t^*(x \#^* y) = s(y \# x) = s(x) = t^*(x)$$

car $t(x) = s(y)$.

(GR 3) si x, y, z sont trois éléments de $\mathbb{B}^* = \mathbb{B}$ tels que $s^*(x) = t^*(y)$ et $s^*(y) = t^*(z)$, alors

$$(x \#^* y) \#^* z = z \# (y \# x) = (z \# y) \# x = x \#^* (y \#^*)$$

car $t(x) = s(y)$ et $t(y) = s(z)$.

Le groupement $(\mathbb{B}^*; s^*; t^*; \#^*)$ est appelé *dual* du groupement $(\mathbb{B}; s; t; \#)$.

3.3 Les g-foncteurs et g-morphismes

Un *g-foncteur* f entre le groupement $(\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1)$ et le groupement $(\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2)$ est un triplet $((\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1); (\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2); f)$, souvent noté $f : (\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1) \longrightarrow (\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2)$, où f est une application d'ensembles $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ vérifiant les axiomes suivants

(GFONC 1) $f s_1 = s_2 f, \quad f t_1 = t_2 f$;

(GFONC 2) si x et y sont deux éléments de $\mathbb{B}_1$ tels que $s_1(x) = t_1(y)$, alors

$$f(x \#_1 y) = f(x) \#_2 f(y)$$

Par abus de notation, nous noterons souvent

$$f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

à la place de

$$f : (\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1) \longrightarrow (\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2)$$

Remarque 3.3.1
Comme pour les groupements, on devrait parler de $\mathfrak{U}$-*g-foncteurs* , plutôt que de g-foncteurs.

Exemple 3.3.1
Il est clair que tout foncteur entre catégories est un g-foncteur.

Remarque 3.3.2
Quand nous avons associé des groupements à un monoïde, nous avons choisi des éléments de celui-ci, ce qui fait que les morphismes de monoïdes ne deviennent pas nécessairement des g-foncteurs. Nous sommes ici dans la même situation que celle où se sont trouvés les topologues quand ils ont commencé à étudier le groupe fondamental. Comme eux, nous pourrions résoudre notre problème en ne considérant pas simplement des monoïdes M mais des monoïdes pointés $(M; c)$ où $c \in M$.

Exemple 3.3.2
Il est usuel de voir les groupes comme des catégories et les homomorphismes de groupes comme des foncteurs. Puisque toute catégorie est un groupement et tout foncteur est un g-groupement. À la différence des monoïdes, le choix de l'élément peut-être fait de façon canonique. Il suffit de prendre l'élément neutre qui est respecté par les homomorphismes de groupes.

Exemple 3.3.3
Si $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ est un g-foncteur alors le triplet $\left(f^*; \mathbb{B}_1^*; \mathbb{B}_2^*\right)$, où $f^* = f$ et $\mathbb{B}_1^*$, $\mathbb{B}_2^*$ sont respectivement les groupements duaux de $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$, est lui aussi un g-foncteur.

(GFONC 1) $f^* s_1^* = f t_1 = t_2 f = s_2^* f^*, \quad f^* t_1^* = f s_1 = s_2 f = t_2^* f^*.$

(GFONC 2) si x et y sont deux éléments de $\mathbb{B}_1^*$ tels que $s_1^*(x) = t_1^*(y)$, alors $t_1(x) = s_1(y)$ et

$$f^*\left(x \#_1^* y\right) = f\left(y \# x\right) = f(y) \#_2 f(x) = f^*(x) \#^* f^*(y)$$

$f^* : \mathbb{B}_1^* \to \mathbb{B}_2^*$ est le *g-foncteur dual* du g-foncteur $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$.
Il est amusant de noter que l'application d'ensembles à la base de chacun de ces g-foncteurs est la même.

Proposition 3.3.1
Soit $(\mathbb{B}; s; t; \#)$ *un groupement. L'application identité* $\mathrm{Id}_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$*, donnée par* $\mathrm{Id}(x) = x$ *pour chaque* $x \in \mathbb{B}$*, définit un g-foncteur de* $(\mathbb{B}; s; t; \#)$ *dans lui-même.*

Démonstration

(GFONC 1) $\mathrm{Id}\, s(x) = s(x) = s\,\mathrm{Id}(x), \quad \mathrm{Id}\, t(x) = t(x) = t\,\mathrm{Id}(x).$

(GFONC 2) Soient x et y sont deux éléments de $\mathbb{B}$ tels que $s(x) = t(y)$.
On a $\mathrm{Id}\left(x \# y\right) = \mathrm{Id}(x) \# \mathrm{Id}(y)$. ❏

Lemme 3.3.2
Si $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *un g-foncteur entre deux petits* $\mathfrak{U}$*-groupements* $\mathbb{B}_1$ *et* $\mathbb{B}_2$*, alors* f *est un élément de l'univers* $\mathfrak{U}$ *i.e. un petit ensemble.*

Démonstration La démonstration est semblable à celle du lemme 2.2.1. ❏
Les g-foncteurs qui vérifient les conditions de ce lemme sont appelés *petits g-foncteurs*. Ainsi nous pouvons parler de l'ensemble $\mathcal{GF}\mathfrak{onc}$ des petits g-foncteurs.
Considérons les applications
– $s : \mathcal{GF}\mathfrak{onc} \to \mathcal{GF}\mathfrak{onc}$ définie par $s\left(f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2\right) = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1}$,
– $t : \mathcal{GF}\mathfrak{onc} \to \mathcal{GF}\mathfrak{onc}$ définie par $t\left(f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2\right) = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}$,

– $\# : \mathscr{GF}\mathrm{onc} \times \mathscr{GF}\mathrm{onc} \to \mathscr{GF}\mathrm{onc}$ définie par

$$f_2 \# f_1 = \begin{cases} f_2 f_1 & \text{si } s(f_2) = t(f_1) \\ f_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous devons tout de même vérifier que $f_2 \# f_1$ est bien un g-foncteur quand

$$s(f_2) = t(f_1) = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}'}$$

Premièrement la composition d'applications d'ensembles $f_2 f_1$ est possible vu la condition imposée à f_1 et f_2. De plus on a

(GFONC 1) Évident d'après les définitions de s et t car $f_2 f_1$ est une application ayant même domaine $\mathbb{B}_1$ que f_1 et même but $\mathbb{B}_2$ que f_2.

(GFONC 2) Soient x et y deux éléments de $\mathbb{B}_1$ pour lesquels $s_1(x) = t_1(y)$. Comme

$$s'(f_1(x)) = f_1 s_1(x) = f_1 t_1(y) = t'(f_1(y))$$

on a

$$\begin{aligned}(f_2 \# f_1)(x \#_1 y) = f_2(f_1(x \#_1 y)) = f_2(f_1(x) \#' f_1(y)) \\ = (f_2 f_1(x)) \#_2 (f_2 f_1(y)) = (f_2 \# f_1)(x) \#_2 (f_2 \# f_1)(y)\end{aligned}$$

Théorème 3.3.3
$(\mathscr{GF}\mathrm{onc}; s; t; \#)$ *est un groupement. C'est même une catégorie.*

Démonstration Nous n'avons qu'à vérifier les axiomes (GR 1) à (GR 3) pour montrer que c'est un groupement.

(GR 1) Pour tout g-foncteur f, on a les égalités suivantes :

$$ss(f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) = s(\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1} = s(f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)$$

$$st(f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) = s(\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} = t(f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)$$

$$tt(f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) = t(\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} = t(f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)$$

$$ts(f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) = t(\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1} = s(f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)$$

(GR 2) Supposons que $f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}'_1$ et $f_2 : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}'_2$ sont deux g-foncteurs tels que

$$s(f_2) = t(f_1)$$

On a

$$s(f_2 \# f_1) = s(f_2 f_1) = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1} = s(f_1)$$

$$t(f_2 \# f_1) = s(f_2 f_1) = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}'_2} = t(f_2)$$

(GR 3) C'est une conséquence directe de l'associativité de la composition des applications d'ensembles.

C'est bien une catégorie car l'axiome (CAT 3) est vérifié par les calculs ci-dessous.

$$f \# s(f) = f \# \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1} = f\,\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1} = f \quad \text{et} \quad t(f) \# f = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} \# f = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}\, f = f$$

où $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ est un foncteur. ❑

Remarque 3.3.3
Dans ce théorème, nous avons défini $f_2 \# f_1$ en prenant f_1 quand $s(f_2) \neq t(f_1)$. En regardant la démonstration, on s'aperçoit immédiatement que ce choix est arbitraire. On aurait très bien pu choisir f_2 ou autre chose. Ces ainsi que nous sommes amenés à dire que deux groupements $(\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1)$ et $(\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2)$ sont *presque égaux* si $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$, $s_1 = s_2$, $t_1 = t_2$ et $x \#_1 y = x \#_2 y$ lorsque $s_1(x) = s_2(x) = t_2(y) = t_1(y)$. Il est évident que l'application identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1} = \mathrm{Id}_{BBB_2}$ définit un g-foncteur $\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1}^{\mathbb{B}_2} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ et un g-foncteur $\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}^{\mathbb{B}_1} : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_1$ tels que

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1}^{\mathbb{B}_2}\,\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}^{\mathbb{B}_1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}^{\mathbb{B}_1}\,\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1}^{\mathbb{B}_2} = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1}$$

En d'autres termes, deux groupements presque égaux sont isomorphes. Il est clair que cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des petits groupements.

L'idée centrale dans notre travail est que les objets et donc les identités ne sont pas des notions très « naturelles » et doivent être, autant que possible, éliminés de notre théorie. Ainsi l'axiome (GFONC 1) cadre mal avec cette idée. Il a été introduit, en théorie des catégories, afin de rendre les identités « stables » par les foncteurs. L'axiome (GFONC 2) intéressant mais imparfait. Il faut que les compositions aient un sens. Ce dernier étant, précédemment, donné par l'axiome (GFONC 1), nous sommes amenés à imposer quelques conditions sur les éléments. D'où la notion beaucoup plus naturelle de g-morphisme.
Un *g-morphisme* f est un triplet $((\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1); (\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2); f)$, souvent noté

$$f : \mathbb{B}_1 \xrightarrow{\star} \mathbb{B}_2$$

où les deux premiers termes sont des groupements et f est une application d'ensembles

$$f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

vérifiant l'axiome suivant

(GMOR) si x et y sont deux éléments de $\mathbb{B}_1$ tels que $s_1(x) = t_1(y)$, alors

$$s_2(f(x)) = t_2(f(y)) \quad \text{et} \quad f(x \#_1 y) = f(x) \#_2 f(y)$$

Il est évident que tout g-foncteur est un g-morphisme puisque

$$s_2(f(x)) = f(s_1(x)) = f(t_1(y)) = t_2(f(y))$$

Comme pour les g-foncteurs, on peut parler de petits g-morphismes et montrer que ceux-ci forment un petit ensemble. Notons $\mathscr{GM}\mathrm{or}$ l'ensemble des petits g-morphismes.

Théorème 3.3.4
Le quadruplet $(\mathscr{GM}\mathrm{or}; s; t; \#)$ *où*

$$s : \mathscr{GM}\mathrm{or} \to \mathscr{GM}\mathrm{or}, \quad t : \mathscr{GM}\mathrm{or} \to \mathscr{GM}\mathrm{or} \quad \textit{et} \quad \# : \mathscr{GM}\mathrm{or} \times \mathscr{GM}\mathrm{or} \to \mathscr{GM}\mathrm{or}$$

sont les applications définies par

– $s(f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1}$,
– $t(f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}$,
– $f_2 \# f_1 = \begin{cases} f_2 f_1 & si\ s(f_2) = t(f_1) \\ f_1 & sinon \end{cases}$

est un groupement et même une catégorie.

La démonstration est identique à celle du théorème 3.3.3.

3.4 Les g-transformations : Une première approche.

Alors que nous avons introduit la notion de g-morphisme pour satisfaire des exigences esthétiques, il n'en va pas du tout de la même manière pour généraliser les transformations naturelles. Le problème se situe au niveau même de leur définition. Elles le sont traditionnellement comme une famille, indexée par les objets, de morphismes qui vérifient des conditions de commutativité de diagrammes. Or nous n'avons pas d'objets et l'étude qui suit va nous permettre d'observer que les axiomes (NAT 1) et (NAT 3) ne nous permettent pas de construire une théorie satisfaisante si nous ne rajoutons pas une condition sur les groupements qui en font pratiquement des catégories. Commençons par quelques remarques.
Premièrement, l'axiome (TRANS 1) et sa forme équivalente (TRANS 1') ont pour unique but de permettre la création des diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd} F_1(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F_1(f)"'] \arrow[dr] & F_2(X) \arrow[d, "F_2(f)"] \\ F_1(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & F_2(Y) \end{tikzcd}$$

pour toute transformation naturelle $\eta : F_1 \rightsquigarrow F_2$ et tout morphisme $f : X \to Y$.
Deuxièmement, l'axiome (TRANS 3) impose à ces différents carrés d'être commutatifs. Ce qui signifie que les deux compositions latérales possibles donnent le même résultat.
Troisièmement, si nous prenons deux morphismes composables f et g, nous obtenons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F_1(X) \arrow[r, "F_1(f)"] \arrow[d, "\eta_X"] & F_1(Y) \arrow[r, "F_1(g)"] \arrow[d, "\eta_Y"] & F_1(Z) \arrow[d, "\eta_Z"] \\ F_2(X) \arrow[r, "F_2(f)"'] & F_2(Y) \arrow[r, "F_2(g)"'] & F_2(Z) \end{tikzcd}$$

Par conséquent, en notant $\eta^1(h) = \eta_R$ et $\eta^2(h) = \eta_S$ pour tout morphisme $h : R \to S$ nous avons les égalités

$$F_2(f) \#_2 \eta^1(f) = \eta^2(f) \#_2 F_1(f)$$

et

$$\eta^1(g) = \eta^2(f)$$

Finalement il semble raisonnable de définir les g-transformations de la manière suivante :
Une *($\mathfrak{U}$-)g-transformation* $\left(\eta^1, \eta^2; f_1, f_2\right)$ entre le g-morphisme $f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ et le g-morphisme $f_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ est un quadruplet où $\eta^1, \eta^2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ sont deux applications d'ensembles satisfaisant les deux axiomes ci-dessous

(GTRANS 1) $s_2\eta^1 = s_2 f_1, \quad t_2\eta^1 = s_2 f_2, \quad s_2\eta^2 = t_2 f_1, \quad t_2\eta_2 = t_2 f_2$;

(GTRANS 2) pour tous x et y dans $\mathbb{B}_1$ vérifiant $s_1(x) = t_1(y)$, on a

$$f_2(x) \#_2 \eta^1(x) = \eta^2(x) \#_2 f_1(x)$$

et

$$\eta^1(x) = \eta^2(y)$$

La notation $\left(\eta^1; \eta^2; f_1; f_2\right)$ n'étant pas très explicite, nous écrirons plus souvent

$$(\eta^1; \eta^2) : f_1 \rightsquigarrow f_2$$

et même

$$\eta : f_1 \rightsquigarrow f_2$$

Dans l'axiome (GTRANS 2), la première égalité porte sur x. La proposition suivante nous montre que l'on peut indifféremment remlpacer le x par y.

Proposition 3.4.1
L'axiome (GTRANS 2) est équivalent à l'axiome

(GTRANS 2') *pour tous x et y dans $\mathbb{B}_1$ vérifiant $s_1(x) = t_1(y)$, on a*

$$f_2(y) \#_2 \eta^1(y) = \eta^2(y) \#_2 f_1(y)$$

et

$$\eta^1(x) = \eta^2(y)$$

Démonstration Supposons que l'axiome (GTRANS 2) soit vérifié. Il nous suffit de montrer qu'alors (GTRANS 2') l'est aussi. D'après l'axiome (GR 1), les éléments y et $s_1(y)$ vérifient les conditions de l'axiome (GTRANS 2). D'où

$$f_2(y) \#_2 \eta^1(y) = \eta^2(y) \#_2 f_1(y)$$

et

$$\eta^1(y) = \eta^2(s_1(y))$$

En prenant $t_1(x)$ et x, on démontre la réciproque avec en plus

$$\eta^1(t_1(x)) = \eta^2(x)$$

❏

Cette démonstration nous permet de voir que les applications η^1 et η^2 sont reliées par des relations très strictes.

Proposition 3.4.2
Pour toute g-transformation $(\eta^1; \eta^2) : f_1 \rightsquigarrow f_2$ entre les g-morphismes f_1 et f_2 de $(\mathbb{B}_1; s_1; t_1)$ dans $(\mathbb{B}_2; s_2; t_2)$, on a les égalités suivantes :

$$\eta^1 = \eta^2 s_1, \quad \eta^2 = \eta^1 t_1, \quad \eta^1 = \eta^1 s_1, \quad \eta^2 = \eta^2 t_1$$

Démonstration Les deux premières égalités ont été vues dans la démonstration de la proposition précédente. Les deux suivantes découlent immédiatement d'elles et de l'axiome (GR 1). ❏

Cette définition semble à priori éloignée de celle donnée pour les transformations naturelles entre foncteurs de catégories. Les deux propositions suivantes vont nous montrer qu'en fait il n'en est rien.

Proposition 3.4.3
Soient f_1 et f_2 deux g-morphismes entre les groupements $(\mathbb{B}_1; s_1; t_1)$ *et* $(\mathbb{B}_2; s_2; t_2)$.
Si $\left(\eta^1; \eta^2\right) : f_1 \rightsquigarrow f_2$ *est une g-transformation, alors l'application* $\eta^1 : \mathbb{B}_1 \rightsquigarrow \mathbb{B}_2$ *vérifie les conditions suivantes :*

1. $s_2\eta^1 s_1 = s_2 f_1$ *et* $t_2\eta^1 s_1 = s_2 f_2$
2. $\eta^1 = \eta^1 s_1$
3. *Pour tout* $x \in \mathbb{B}_1$, *on a* $f_2(x) \#_2 \eta^1(s_1(x)) = \eta^1(t_1(x)) \#_2 f_1(x)$.

Démonstration Supposons que $(\eta^1; \eta^2) : f_1 \rightsquigarrow f_2$ soit une g-transformation. La seconde propriété a été vue dans la proposition 3.4.2.

La première est la conséquence directe de l'axiome (GTRANS 1) et de la seconde propriété. Pour la dernière, considérons un élément x de $\mathbb{B}_1$. D'après l'axiome (GR 1), x et $s_1(x)$ vérifient la condition de l'axiome (GTRANS 2). Doù

$$f_2(x) \#_2 \eta^1(x) = \eta^2(x) \#_2 f_1(x)$$

La proposition 3.4.2 nous dit que

$$\eta^1(x) = \eta^1(s_1(x)) \quad \text{et} \quad \eta^2(x) = \eta^1(t_1(x))$$

D'où le résultat. ❏

Pour démontrer la réciproque dans le cas où f_1 et f_2 sont des g-foncteurs, nous aurons besoin du

Lemme 3.4.4
Si f_1 et f_2 sont des g-foncteurs de $\mathbb{B}_1$ *vers* $\mathbb{B}_2$, *alors toute application* $\eta : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *qui satisfait les conditions*

$$s_2\eta s_1 = s_2 f_1 \quad \textit{et} \quad t_2\eta s_1 = s_2 f_2$$

vérifient aussi les conditions

$$s_2\eta t_1 = t_2 f_1 \quad \textit{et} \quad t_2\eta t_1 = t_2 f_2$$

Démonstration C'est une conséquence immédiate des axiomes (GR 1) et (GFONC 1) :

$$s_2\eta t_1 = s_2\eta s_1 t_1 = s_2 f_1 t_1 = s_2 t_2 f_1 = t_2 f_2$$

et

$$t_2\eta t_1 = t_2\eta s_1 t_1 = s_2 f_2 t_1 = s_2 t_2 f_2 = t_2 f_2$$

❏

Proposition 3.4.5
Si f_1 et f_2 sont des g-foncteurs, alors toute fonction η de $\mathbb{B}_1$ dans $\mathbb{B}_2$ qui vérifient les trois conditions de la proposition 3.4.3 définit une g-transformation $(\eta; \eta t_1) : f_1 \rightsquigarrow f_2$.

Démonstration Considérons une application $\eta : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ qui vérifient les trois propriétés précédentes. Posons $\eta^1 = \eta$ et $\eta^2 = \eta t_1$. Montrons que $(\eta^1; \eta^2)$ est une g-transformation de f_1 vers f_2.

(GTRANS 1) Puisque $\eta^1 = \eta^1 s_1$, on a, d'après la première condition,

$$s_2\eta^1 = s_2 f_1 \quad \text{et} \quad t_2\eta^1 = s_2 f_2$$

Comme $\eta^2 = \eta t_1$, le lemme 3.4.4, nous donne en plus

$$s_2\eta^2 = t_2 f_1 \quad \text{et} \quad t_2\eta^2 = t_2 f_2$$

(GTRANS 2) Soient x et y telles que $s_1(x) = t_1(y)$. Tout découle de $\eta = \eta s_1$ et $\eta^2 = \eta^1 t_1$. En effet à la vue de la condition imposée à x et y, on a

$$\eta^1(x) = \eta^1(s_1(x)) = \eta^1(t_1(y)) = \eta^2(y)$$

Et d'après la troisième propriété vérifiée par η, on a aussi

$$f_2(x) \#_2 \eta^1(x) = \eta^2(x) \#_2 f_1(x)$$

❏

Avant de poursuivre, continuons à étudier de plus près ce qui se passe pour les transformations naturelles de la théorie des catégories.

Une propriété classique des transformations naturelles de catégories est que chaque foncteur $F : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}_2$ définit une transformation naturelle de F dans lui-même. En effet, pour tout objet X de $\mathbb{C}_1$, posons $\eta_X = F(\mathrm{Id}_X)$. Alors, pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathbb{C}_1$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ F(X) \arrow[r, "F(f)"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

est commutatif car

$$\eta_Y \#_2 F(f) = F(\mathrm{Id}_Y) \#_2 F(f) = F(\mathrm{Id}_Y \#_1 f) = F(f \#_1 \mathrm{Id}_X) = F(f) \#_2 F(\mathrm{Id}_X) = F(f) \#_2 \eta_X$$

Plus précisément, nous remarquons que nous y avons utilisé deux choses. La première est que, F étant un foncteur, l'image d'une composition est égale à la composition des images ; et la seconde, que $\mathrm{Id}_Y \#_1 f = f \#_1 \mathrm{Id}_X$ dans la catégorie $\mathbb{C}_1$. En d'autres termes, nous avons utilisé certaines propriétés des identités. Or le principe qui nous a guidé jusqu'à maintenant est d'enlever les références à ces dernières. Cette impossibilité pour les g-foncteurs de devenir des g-transformations nous empêche de définir des applications source et but sur l'ensemble des g-transformations. C'est en cela qu'il ne semble pas y avoir de théorie satisfaisante de g-transformation sans l'ajout de quelque chose de supplémentaire. Nous reviendrons là-dessus dans le chapitre 6. Malgré tout, et afin de bien illustrer notre propos nous allons continuer la construction en supposant que les groupements que nous allons considérer dans le reste de cette section satisfont tous la condition supplémentaire

$$(\star) \qquad t(x) \# x = x \# s(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{B}$$

Pour bien garder celà à l'esprit, nous parlerons de $\star$-groupements.

La proposition qui suit va nous permettre de définir sur l'ensemble des petites g-transformations entre g-morphismes de $\star$-groupements des applications source et but.

Proposition 3.4.6
Si f est un g-morphisme du $\star$-groupement $(\mathbb{B}_1; s_1; t_1; \#_1)$ vers le $\star$-groupement $(\mathbb{B}_2; s_2; t_2; \#_2)$, alors $(s_2 f; t_1 f)$ est une g-transformation de f dans f.

Démonstration C'est une simple vérification des axiomes (GTRANS 1) et (GTRANS 2). Posons $\eta^1 = s_2 f$ et $\eta^2 = t_2 f$

(GTRANS 1) Évident.

(GTRANS 2) Soient x et y deux éléments de $\mathbb{B}_1$ satisfaisant $s_1(x) = t_1(y)$. En utilisant la condition $\star$, on trouve

$$\begin{aligned} f(x)\,\#_2\,\eta^1(x) &= f(x)\,\#_2\,s_2\,(f(x)) \\ &= t_2\,(f(x))\,\#_1\,f(x) \\ &= \eta^2(x)\,\#_2\,f(x) \end{aligned}$$

De plus, grace à l'axiome (GMOR), on trouve

$$\eta^1(x) = s_2 f(x) = t_2 f(y) = \eta^2(y)$$

❏

Remarque 3.4.1
L'application identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{B}}$ de l'ensemble $\mathbb{B}$ dans lui-même définit clairement un g-morphisme, et même un g-foncteur, de $(\mathbb{B}; s; t; \#)$ dans lui-même. Ainsi $(s_1; t_1)$ est une g-transformation de $\mathrm{Id}_{\mathbb{B}}$ vers lui-même.

On dit qu'une g-transformation $\eta : f_1 \rightsquigarrow f_2$ est *petite* quand les g-morphismes f_1 et f_2 le sont.

Lemme 3.4.7
Toute petite $\mathfrak{U}$-g-transformation est un élément de l'univers $\mathfrak{U}$.

Démonstration Semblable à la démonstration du lemme 3.3.2. ❏

Désignons par $\star\mathcal{GT}\mathfrak{rans}$ l'ensemble de toutes les petites g-transformations au dessus de $\star$-groupements. Comme le théorème suivant va le montrer, il est aisé de munir cet ensemble d'une structure de groupement.

Théorème 3.4.8
On peut définir deux applications σ_1 et τ_1 de $\star\mathcal{GT}\mathfrak{rans}$ dans lui-même de la manière suivante :

$$\sigma_1\,(\eta : f_1 \rightsquigarrow f_2) = ((s_2 f_1; t_2 f_1) : f_1 \rightsquigarrow f_1)$$

et

$$\tau_1\,(\eta : f_1 \rightsquigarrow f_2) = ((s_2 f_2; t_2 f_2) : f_2 \rightsquigarrow f_2)$$

Soient deux g-transformations $\eta_1 : f_1 \rightsquigarrow f_1'$, $\eta_2 : f_2 \rightsquigarrow f_2'$.
– *Si $\sigma_1(\eta_2) = \tau_1(\eta_1)$, notons $\eta_2 \circledast \eta_1 : f_1 \rightsquigarrow f_2'$ la g-transformation définie, pour tout $x \in \mathbb{B}_1$, par*

$$(\eta_2 \circledast \eta_1)\,(x) = \left(\eta_2^1(x)\,\#_2\,\eta_1^1(x); \eta_2^2(x)\,\#_2\,\eta_2^2(x)\right)$$

– *sinon, posons $\eta_2 \circledast \eta_1 = \eta_1 : f_1 \rightsquigarrow f_1'$.*

On obtient une application $\circledast$ *de* $\star\mathcal{GT}\mathfrak{rans}\times\star\mathcal{GT}\mathfrak{rans}$ *dans* $\star\mathcal{GT}\mathfrak{rans}$.
Le quadruplet $(\star\mathcal{GT}\mathfrak{rans};\sigma_1;\tau_1;\circledast)$ *est un groupement.*

Démonstration Avant de vérifier les axiomes des groupements, nous devons montrer que si $\sigma_1(\eta_2) = \tau_1(\eta_1)$ alors $\eta_2 \circledast \eta_1 : f_1 \rightsquigarrow f_2'$ est bien une g-transformation. Pour plus de clareté, posons $\eta_2 \circledast \eta_1 = (\mu^1;\mu^2)$

(GTRANS 1) Remarquons que $\sigma_1(\eta_2) = \tau_1(\eta_1)$ implique $f_2 = f_1'$. En effet $\sigma_1(\eta_2) = \tau_1(\eta_1)$ signifie

$$(s_2 f_2; t_2 f_2; f_2; f_2) = (s_2 f_1'; t_2 f_1'; f_1'; f_1')$$

Ainsi, l'axiome (GR 2) implique

$$s_2\mu^1 = s_2\left(\eta_2^1 \#_2 \eta_1^1\right) = s_2\eta_1^1 = s_2 f_1$$

et

$$t_2\mu^1 = t_2\left(\eta_2^1 \#_2 \eta_1^1\right) = t_2\eta_2^1 = s_2 f_2'$$

car, d'après (GTRANS 1) et la remarque ci-dessus, $s_2\eta_2^1 = s_2 f_2 = s_2 f_1' = t_2\eta_1^1$.
De même, puisque $s_2\eta_2^2 = t_2 f_2 = t_2 f_1' = t_2\eta_1^2$, on trouve

$$s_2\mu^2 = s_2\left(\eta_2^2 \#_2 \eta_1^2\right) = s_2\eta_1^2 = t_2 f_1$$

et

$$t_2\mu^2 = t_2\left(\eta_2^1 \#_2 \eta_1^1\right) = t_2\eta_2^2 = t_2 f_2'$$

(GTRANS 2) Pour tous $x \in \mathbb{B}_1$ et $y \in \mathbb{B}_1$ tels que $s_2(x) = t_2(y)$, les axiomes (GTRANS 2) vérifiés par η_1 et η_2 et le fait que $f_2 = f_1'$, nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
f_2'(x) \#_2 \mu^1(x) &= f_2' \#_2 \left(\eta_2^1(x) \#_2 \eta_1^1(x)\right)\\
&= \left(f_2'(x) \#_2 \eta_2^1(x)\right) \#_2 \eta_1^1(x)\\
&= \left(\eta_2^2(x) \#_2 f_2(x)\right) \#_2 \eta_1^1(x)\\
&= \eta_2^2(x) \#_2 \left(f_2(x) \#_2 \eta_1^1(x)\right)\\
&= \eta_2^2(x) \#_2 \left(f_1'(x) \#_2 \eta_1^1(x)\right)\\
&= \eta_2^2(x) \#_2 \left(\eta_1^2(x) \#_2 f_1(x)\right)\\
&= \left(\eta_2^2(x) \#_2 \eta_1^2(x)\right) \#_2 f_1(x) = \mu^2(x) \#_2 f_1(x)
\end{aligned}$$

et

$$\mu^1(x) = \eta_2^1(x) \#_2 \eta_1^1(x) = \eta_2^2(y) \#_2 \eta_1^2(y) = \mu^2(y)$$

Passons maintenant à la seconde partie de notre démonstration.

(GR 1) Pour tout $\eta : f_1 \rightsquigarrow f_2$ appartenant à $\star\mathcal{GT}\mathfrak{rans}$, on a

$$(\sigma_1\sigma_1)(\eta) = \sigma_1((s_2 f_1; t_2 f_1) : f_1 \rightsquigarrow f_1) = (s_2 f_1; t_2 f_1) : f_1 \rightsquigarrow f_1 = \sigma_1(\eta)$$

$$(\sigma_1\tau_1)(\eta) = \sigma_1((s_2 f_2; t_2 f_2) : f_2 \rightsquigarrow f_2) = (s_2 f_2; t_2 f_2) : f_2 \rightsquigarrow f_2 = \tau_1(\eta)$$

$$(\tau_1\tau_1)(\eta) = \tau_1((s_2 f_2; t_2 f_2) : f_2 \rightsquigarrow f_2) = (s_2 f_2; t_2 f_2) : f_2 \rightsquigarrow f_2 = \tau_1(\eta)$$

$$(\tau_1\sigma_1)(\eta) = \tau_1((s_2 f_1; t_1 f_1) : f_1 \rightsquigarrow f_1) = (s_2 f_1; t_2 f_1) : f_1 \rightsquigarrow f_1 = \sigma_1(\eta)$$

(GR 2) Soient $\eta_1 : f_1 \rightsquigarrow f_1'$ et $\eta_2 : f_2 \rightsquigarrow f_2'$ deux éléments de $\star\mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans}$ tels que $\sigma_1(\eta_2) = \tau_1(\eta_1)$. Dans ce cas $\eta_2 \circledast \eta_1$ est une g-transformation de f_1 dans f_2'. Par conséquent

$$\sigma_1(\eta_2 \circledast \eta_1) = (s_2 f_1; t_2 f_1) = \sigma_1(\eta_1) \quad \text{et} \quad \tau_1(\eta_2 \circledast \eta_1) = (s_2 f_2'; t_2 f_2') = \tau_1(\eta_2)$$

(GR 3) Soient $\eta_1 : f_1 \rightsquigarrow f_1'$, $\eta_2 : f_2 \rightsquigarrow f_2'$ et $\eta_3 : f_3 \rightsquigarrow f_3'$ trois éléments de $\star\mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans}$ tels que $\sigma_1(\eta_2) = \tau_1(\eta_1)$ et $\sigma_1(\eta_3) = \tau_1(\eta_2)$.
Comme $\sigma_1(\eta_3 \circledast \eta_2) = \sigma_1(\eta_2) = \tau_1(\eta_1)$ et $\tau_1(\eta_2 \circledast \eta_1) = \tau_1(\eta_2) = \sigma_1(\eta_3)$, on a

$$s_2(\eta_3^1 \#_2 \eta_2^1) = t_2\eta_1^1$$

et

$$s_2(\eta_3^2 \#_2 \eta_2^2) = t_2\eta_1^2$$

En utilisant l'axiome (GR 3), on en déduit

$$\left(\eta_3^1 \#_2 \eta_2^1\right) \#_2 \eta_1^1 = \eta_3^1 \#_2 \left(\eta_2^1 \#_2 \eta_1^1\right)$$

et

$$\left(\eta_3^2 \#_2 \eta_2^2\right) \#_2 \eta_1^2 = \eta_3^2 \#_2 \left(\eta_2^2 \#_2 \eta_1^2\right)$$

D'où

$$(\eta_3 \circledast \eta_2) \circledast \eta_1 = \eta_3 \circledast (\eta_2 \circledast \eta_1)$$

❑

Remarque 3.4.2
À la différence de ce qui se passe pour les g-foncteurs, les g-transformations ne forment pas une catégorie. Ce qui n'est pas surprenant car c'est justement pour cette raison que nous avons introduit la notion de groupement.

On peut munir l'ensemble des (petites) g-transformations de deux autres structures de groupement. Pour cela nous aurons besoin du résultat intermédiaire suivant

Proposition 3.4.9
Soient $f : \mathbb{B}_1' \to \mathbb{B}_1$, $g : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_2'$ deux g-morphismes et $(\eta^1; \eta^2) : (f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) \rightsquigarrow (f_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)$ une g-transformation. Les quadruplets $\left(\eta^1 f; \eta^2 f;\, f_1 f;\, f_2 f\right)$ et $\left(g\eta^1; g\eta^2; g f_1; g f_2\right)$ sont des g-transformations.

Démonstration Nous nous contenterons de faire la démonstration pour $(\eta^1 f; \eta^2 f)$ car celle de $(g\eta^1; g\eta^2)$ est similaire.

(GTRANS 1) Comme $(\eta^1; \eta^2)$ est une g-transformation

$$s_2(\eta^1 f) = (s_2\eta^1) f = (s_2 f_1) f = s_2(f_1 f)$$

$$t_2(\eta^1 f) = (t_2\eta^1) f = (s_2 f_2) f = s_2(f_2 f)$$

et

$$s_2(\eta^2 f) = (s_2\eta^2) f = (t_2 f_1) f = t_2(f_1 f)$$

$$t_2(\eta^2 f) = (t_2\eta^2) f = (t_2 f_2) f = t_2(f_2 f)$$

(GTRANS 2) Pour tout $x \in \mathbb{B}'_1$ et tout $y \in \mathbb{B}'_1$ tels que $s'_1(x) = t'_1(x)$,

$$
\begin{aligned}
(f_2 f)(x) \#_2 (\eta^1 f)(x) &= f_2(f(x)) \#_2 \eta^1(f(x)) \\
&= \eta^2(f(x)) \#_2 f_1(f(x)) = (\eta^2 f)(x) \#_2 (f_1 f)(x)
\end{aligned}
$$

car $\eta : f_1 \rightsquigarrow f_2$ est une g-transformation et $f(x) \in \mathbb{B}_1$, et

$$(\eta^1 f)(x) = \eta^1(f(x)) = \eta^2(f(x)) = (\eta^2 f)(x)$$

d'après l'axiome (GMOR), $s_2 f(x) = t_2 f(y)$. ❏

Pour simplifier, si $\eta = (\eta^1; \eta^2)$ est la g-transformation de la proposition, alors on note ηf et $g\eta$ les nouvelles g-transformations.

Lemme 3.4.10
Soient $\eta : f_1 \rightsquigarrow f_2$ et $\eta' : f'_1 \rightsquigarrow f'_2$ deux g-transformations pour lesquelles le groupement but de f_1 et f_2 est aussi le groupement source de f'_1 et f'_2. Alors les g-transformations

$$(f'_1\eta) \circledast (\eta' f_2) : f'_1 f_1 \rightsquigarrow f'_2 f_2$$

et

$$(\eta' f_1) \circledast (f'_2\eta) : f'_1 f_1 \rightsquigarrow f'_2 f_2$$

existent.

Démonstration Puisque $f'_1\eta : f'_1 f_1 \rightsquigarrow f'_1 f_2$ et $\eta' f_2 : f'_1 f_2 \rightsquigarrow f'_2 f_2$, la première g-transformation $(f'_1\eta) \circledast (\eta' f_2)$ existe. L'existence de la seconde se montre de la même manière. ❏

Grâce à ce lemme, on peut définir de nouvelles applications :

Théorème 3.4.11
Considérons les quatre applications d'ensembles σ_0, τ_0, $\boxtimes$ et $\boxdot$sont les applications ci-dessous.

– $\sigma_0 : \star\mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans} \to \star\mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans}$ *définie par*

$$\sigma_0(\eta : (f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) \rightsquigarrow (f_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)) = (s_1; t_1) : \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1} \rightsquigarrow \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1}$$

– $\tau_0 : \star\mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans} \to \star\mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans}$ *définie par*

$$\tau_0(\eta : (f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) \rightsquigarrow (f_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)) = (s_2; t_2) : \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} \rightsquigarrow \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}$$

– $\boxtimes, \boxdot : \star\mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans} \times \star\mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans} \to \star\mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans}$ *définies par*

$$\eta_2 \boxtimes \eta_1 = \begin{cases} (f'_2\eta_1) \circledast (\eta_2 f_1) & \text{si } \sigma_0(\eta_2) = \tau_0(\eta_1) \\ \eta_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\eta_2 \boxdot \eta_1 = \begin{cases} (\eta_2 f'_1) \circledast (f_2\eta_1) & \text{si } \sigma_0(\eta_2) = \tau_0(\eta_1) \\ \eta_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $\eta_1 : (f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}'_1) \rightsquigarrow (f'_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}'_1)$ et $\eta_2 : (f_2 : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}'_2) \rightsquigarrow (f'_2 : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}'_2)$ deux g-transformations.

Les deux quadruplets $(\mathcal{GT}\mathfrak{rans}; \sigma_0; \tau_0; \boxtimes)$ *et* $(\mathcal{GT}\mathfrak{rans}; \sigma_0; \tau_0; \boxdot)$ *sont des groupements.*

Démonstration La condition $\sigma_0(\eta_2) = \tau_0(\eta_1)$ n'est autre que celle imposée dans le lemme 3.4.10. Par conséquent $\eta_2 \boxtimes \eta_1$ et $\eta_2 \boxdot \eta_1$ existent et sont bien des g-groupements.

(GR 1) Pour tout $\eta : (f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) \rightsquigarrow (f_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)$,

$$\begin{aligned}
\sigma_0\sigma_0(\eta) &= \sigma_0(s_1; t_1) = (s_1; t_1) = \sigma_0(\eta)\\
\sigma_0\tau_0(\eta) &= \sigma_0(s_2; t_2) = (s_2; t_2) = \tau_0(\eta)\\
\tau_0\tau_0(\eta) &= \tau_0(s_2; t_2) = (s_2; t_2) = \tau_0(\eta)\\
\tau_0\sigma_0(\eta) &= \tau_0(s_1; t_1) = (s_1; t_1) = \sigma_0(\eta)
\end{aligned}$$

(GR 2) Pour tous

$$\eta_1 : (f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}'_1) \rightsquigarrow (f'_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}'_1)$$

et

$$\eta_2 : (f_2 : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}'_2) \rightsquigarrow (f'_2 : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}'_2)$$

avec $\sigma_0(\eta_2) = \tau_0(\eta_1)$,

$$\sigma_0(\eta_2 \boxtimes \eta_1) = (s_1; t_1) = \sigma_0(\eta_1) \qquad \text{et} \qquad \tau_0(\eta_2 \boxtimes \eta_1) = (s'_2; t'_2) = \tau_0(\eta_2)$$

car $\eta_2 \boxtimes \eta_1$ va de $f'_1 f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}'_2$ vers $f'_2 f_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}'_2$.

(GR 3) Soient $\eta_1 : f_1 \rightsquigarrow f'_1$, $\eta_2 : f_2 \rightsquigarrow f'_2$ et $\eta_3 : f_3 \rightsquigarrow f'_3$ trois éléments de $\star\mathcal{GT}\mathfrak{rans}$ tels que $\sigma_0(\eta_2) = \tau_0(\eta_1)$ et $\sigma_0(\eta_3) = \tau_0(\eta_2)$.

$$(\eta_3 \boxtimes \eta_2) \boxtimes \eta_1 = ((f'_3\eta_2) \circledast (\eta_3 f_2)) \boxtimes \eta_1 = (f'_3 f'_2\eta_1) \circledast ((f'_3\eta_2 f_1) \circledast (\eta_3 f_2 f_1))$$

$$\eta_3 \boxtimes (\eta_2 \boxtimes \eta_1) = \eta_3 \boxtimes ((f'_2\eta_1) \circledast (\eta_2 f_1)) = ((f'_3 f'_2\eta_1) \circledast (f'_3\eta_2 f_1)) \circledast (\eta_3 f_2 f_1)$$

et

$$(f'_3 f'_2\eta_1) \circledast ((f'_3\eta_2 f_1) \circledast (\eta_3 f_2 f_1)) = ((f'_3 f'_2\eta_1) \circledast (f'_3\eta_2 f_1)) \circledast (\eta_3 f_2 f_1)$$

d'après le théorème 3.4.8.

On démontre de la même manière que $(\mathcal{GT}\mathfrak{rans}; \sigma_0; \tau_0; \boxdot)$ est un groupement. ❏

Ce théorème nous montre que l'ensemble des petites g-transformations est naturellement muni de trois structures de groupement. Dans les deux propositions qui viennent maintenant nous allons étudier de plus près les relations qui existent entre elles.

Proposition 3.4.12
Avec les notations introduites précédemment, on a :

$$\sigma_0\sigma_1 = \sigma_0 \qquad \sigma_0\tau_1 = \sigma_0 \qquad \tau_0\sigma_1 = \tau_0 \qquad \tau_0\tau_1 = \tau_0$$

$$\sigma_1\sigma_0 = \sigma_0 \qquad \sigma_1\tau_0 = \tau_0 \qquad \tau_1\sigma_0 = \sigma_0 \qquad \tau_1\tau_0 = \tau_0$$

Démonstration Soit $\eta : (f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) \rightsquigarrow (f_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)$ une g-transformation.

$$\begin{array}{ll}
\sigma_0\sigma_1(\eta) = \sigma_0(s_2 f_1; t_2 f_1) = (s_1; t_1) = \sigma_0(\eta) & \sigma_0\tau_1(\eta) = \sigma_0(s_2 f_2; t_2 f_2) = (s_1; t_1) = \sigma_0(\eta) \\
\tau_0\sigma_1(\eta) = \tau_0(s_2 f_1; t_2 f_1) = (s_2; t_2) = \tau_0(\eta) & \tau_0\tau_1(\eta) = \tau_0(s_2 f_2; t_2 f_2) = (s_2; t_2) = \tau_0(\eta) \\
\sigma_1\sigma_0(\eta) = \sigma_1(s_1; t_1) = (s_1; t_1) = \sigma_0(\eta) & \sigma_1\tau_0(\eta) = \sigma_1(s_2; t_2) = (s_2; t_2) = \tau_0(\eta) \\
\tau_1\sigma_0(\eta) = \tau_1(s_1; t_1) = (s_1; t_1) = \sigma_0(\eta) & \tau_1\tau_0(\eta) = \tau_1(s_2; t_2) = (s_2; t_2) = \tau_0(\eta) \quad ❏
\end{array}$$

Une conséquence immédiate de cette proposition est le corollaire suivant.

Corollaire 3.4.13
On a

$$\sigma_0\sigma_1 = \sigma_1\sigma_0 \quad et \quad \tau_0\tau_1 = \tau_1\tau_0$$

$$\tau_0\sigma_1 = \sigma_1\tau_0 \quad et \quad \sigma_0\tau_1 = \tau_1\sigma_0$$

Le problème dans le cas présent c'est que si les relations entre les applications sources et buts sont extrèmement simples, celles entre les compositions le sont beaucoup moins. Nous reviendrons dessus dans le chapitre 5.

Chapitre 4

Exemples de groupement : Les chemins de Moore et leurs extensions

En cherchant un exemple de groupement moins trivial que les catégories, on est de manière assez naturelle amené à chercher un exemple géométrique. Pourquoi ne pas regarder du côté de la topologie algébrique ? Le groupe fondamental qui fut introduit par Henri Poincaré à la fin du 19ème siècle et qui fut à l'origine de la topologie algébrique mérite quelques attentions. Il est basé sur les notions de chemins et d'homotopie. L'homotopie sert à identifier des chemins entre eux afin de pouvoir construire une composition qui vérifie les axiomes de groupe. Géométriquement cette composition est basée sur la juxtaposition des chemins.
Dans toute la suite de ce chapitre X désignera un espace topologique.

4.1 Les chemins de Moore

Un *chemin de Moore* est tout simplement une application continue γ d'un intervalle $[0;d]$, où $d > 0$, dans l'espace topologique X.
Notons $\mathbb{M}(X)$ l'ensemble des chemins de Moore de l'espace X. Dans la définition ci-dessus, le nombre d correspond à la longueur de l'intervalle. Il peut aussi être vu comme la durée mise pour parcourir le chemin. Nous pouvons ainsi construire une application durée δ de $\mathbb{M}(X)$ dans $]0;+\infty[$ qui a tout chemin γ associe sa durée de parcours δ_γ.
Nous allons maintenant munir l'ensemble $\mathbb{P}(X)$ d'une structure de groupement. Pour cela nous pouvons commencer par prendre pour applications source et but les applications

$$\mathfrak{s} : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X) \quad \text{et} \quad \mathfrak{t} : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$$

définies de la manière suivante :

$$\mathfrak{s}(\gamma)(u) = \gamma(0) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{t}(\gamma)(t) = \gamma(\delta_\gamma)$$

pour tout $t \in [0;1]$. $\mathfrak{s}(\gamma)$ et $\mathfrak{t}(\gamma)$ sont des applications constantes, donc continues, de $[0;1]$ dans X. Ce sont des chemins de Moore de durée 1.
Pour tout t appartenant à l'intervalle $[0;1]$ et tout chemin $\gamma \in \mathbb{P}(X)$, on a

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\gamma))(t) = \mathfrak{s}(\gamma)(0) = \gamma(0) = \mathfrak{s}(\gamma)(t)$$

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{t}(\gamma))(t) = \mathfrak{t}(\gamma)(0) = \gamma(\delta_\gamma) = \mathfrak{t}(\gamma)(t)$$
$$\mathfrak{t}(\mathfrak{t}(\gamma))(t) = \mathfrak{t}(\gamma)(\delta_\gamma) = \gamma(\delta_\gamma) = \mathfrak{t}(\gamma)(t)$$
$$\mathfrak{t}(\mathfrak{s}(\gamma))(t) = \mathfrak{s}(\gamma)(\delta_\gamma) = \gamma(0) = \mathfrak{s}(\gamma)(t)$$

Par conséquent l'axiome (GR 1) est vérifié.
Ces deux seules applications ne sont pas suffisantes, il nous faut une composition. Celle-ci correspond en fait à l'opération géométrique qui consiste à mettre bout-à-bout deux chemins à partir du moment où l'un commence là où fini l'autre. Pour être plus précis, définissons la composition comme l'application # de $\mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(X)$ dans $\mathbb{P}(X)$ donnée par la construction qui suit. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins de Moore.

– Si $\mathfrak{s}(\gamma_2) = \mathfrak{t}(\gamma_1)$, alors $\gamma_2 \# \gamma_1$ est la chemin de durée $\delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2}$ défini par

$$(\gamma_2 \# \gamma_1)(t) \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pour } t \in \left[0; \delta_{\gamma_1}\right] \\ \gamma_2(t - \delta_{\gamma_1}) & \text{pour } t \in \left[\delta_{\gamma_1}; \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2}\right] \end{cases}$$

– Sinon $\gamma_2 \# \gamma_1 = \gamma_1$.

Dans le premier cas, comme $\mathfrak{s}(\gamma_2) = \mathfrak{t}(\gamma_1)$, on a $\gamma_1(\delta_{\gamma_1}) = \gamma_2(0) = \gamma_2(\delta_{\gamma_1} - \delta_{\gamma_1})$. De plus les intervalles $\left[0; \delta_{\gamma_1}\right]$ et $\left[\delta_{\gamma_1}; \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2}\right]$ sont fermés. Par conséquent $\gamma_2 \# \gamma_1$ est bien continue de $\left[0; \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2}\right]$ dans X. En d'autres mots c'est un chemin de Moore. Le second cas donne trivialement un chemin de Moore.
Il ne nous reste plus qu'à vérifier les axiomes (GR 2) et (GR 3). Soient γ_1 et γ_2 deux chemins de Moore tels que $\mathfrak{s}(\gamma_2) = \mathfrak{t}(\gamma_1)$. Pour tout $t \in \left[0; \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2}\right]$, les calculs

$$\mathfrak{s}(\gamma_2 \# \gamma_1)(t) = (\gamma_2 \# \gamma_1)(0) = \gamma_1(0) = \mathfrak{s}(\gamma_1)(t)$$

$$\mathfrak{t}(\gamma_2 \# \gamma_1)(t) = (\gamma_2 \# \gamma_1)(\delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2}) = \gamma_2(\delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} - \delta_{\gamma_1}) = \gamma_2(\delta_{\gamma_2}) = \mathfrak{t}(\gamma_2)(t)$$

montrent que l'axiome (GR 2) est satisfait.
Si γ_1, γ_2 et γ_3 sont trois chemins de Moore tels que $\mathfrak{s}(\gamma_3) = \mathfrak{t}(\gamma_2)$ et $\mathfrak{s}(\gamma_2) = \mathfrak{t}(\gamma_1)$, alors

$$(\gamma_3 \# \gamma_2) \# \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \delta_{\gamma_1} \\ (\gamma_3 \# \gamma_2)(t - \delta_{\gamma_1}) & \text{pour } \delta_{\gamma_1} \leq t \leq \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} + \delta_{\gamma_3} \end{cases}$$

et

$$\gamma_3 \# (\gamma_2 \# \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_2 \# \gamma_1(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} \\ \gamma_3(t - \delta_{\gamma_1} - \delta_{\gamma_2}) & \text{pour } \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} \leq t \leq \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} + \delta_{\gamma_3} \end{cases}$$

D'où

$$(\gamma_3 \# \gamma_2) \# \gamma_1(t) = \gamma_3 \# (\gamma_2 \# \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \delta_{\gamma_1} \\ \gamma_2(t - \delta_{\gamma_1}) & \text{pour } \delta_{\gamma_1} \leq t \leq \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} \\ \gamma_3(t - \delta_{\gamma_1} - \delta_{\gamma_2}) & \text{pour } \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} \leq t \leq \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} + \delta_{\gamma_3} \end{cases}$$

Ainsi l'axiome (GR 3) est vérifié. Finalement

Théorème 4.1.1
Le quadruplet $(\mathbb{P}(X); \mathfrak{s}; \mathfrak{t}; \#)$ *est un groupement.*

4.2 Les surfaces de Moore

Une *surface de Moore* est une application continue de $[0; d_1] \times [0; d_2]$, où d_1 et d_2 sont des réels strictement positifs, dans l'espace X.
Il faut bien remarquer que le mot surface est ici utilisé de manière abusive. S'il est entendu que le produit $[0; d_1] \times [0; d_2]$ est une surface, il n'en va pas nécessairement de même pour son image dans X.
En se référant à ce que nous avons dit dans la section précédente, nous pouvons voir d_1 comme la durée de parcours dans la première direction et d_2 comme celle dans la seconde direction. Ainsi si nous notons $\mathbb{S}(X)$ l'ensemble des surfaces de Moore de l'espace X, alors nous avons naturellement deux applications de durée δ_1 et δ_2 de $\mathbb{S}(X)$ dans $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \delta_1(\gamma) &= d_1 = \text{durée dans la première direction} \\ \delta_2(\gamma) &= d_2 = \text{durée dans la deuxième direction} \end{aligned}$$

pour $\gamma \in \mathbb{S}(X)$.
Nous pouvons munir l'ensemble $\mathbb{S}(X)$ de deux structures de groupement. Considérons $\mathfrak{s}_1$ et $\mathfrak{s}_2$ les deux applications définies, sur $\mathbb{S}(X)$ à valeur dans lui-même, par les formules suivantes :

$$\mathfrak{s}_1(\gamma)(u; v) = \gamma(0; v) \qquad \text{pour } (u; v) \in [0; 1] \times [0; \delta_2(\gamma)]$$

$$\mathfrak{s}_2(\gamma)(u; v) = \gamma(u; 0) \qquad \text{pour } (u; v) \in [0; \delta_1(\gamma)] \times [0; 1]$$

De même on peut définir deux applications $\mathfrak{t}_i : \mathbb{S}(X) \to \mathbb{S}(X)$, $i = 1, 2$, de la manière suivante :

$$\mathfrak{t}_1(\gamma)(u; v) = \gamma(\delta_1(\gamma); v) \qquad \text{pour } (u; v) \in [0; 1] \times [0; \delta_2(\gamma)]$$

$$\mathfrak{t}_2(\gamma)(u; v) = \gamma(u; \delta_2(\gamma)) \qquad \text{pour } (u; v) \in [0; \delta_1(\gamma)] \times [0; 1]$$

Les applications sources et buts étant données, nous pouvons maintenant nous intéresser aux compositions. Il y aura une composition $\#_1$ suivant la première direction et une autre $\#_2$ suivant la seconde. Pour deux surfaces de Moore γ_1 et γ_2,

– si $\mathfrak{s}_1(\gamma_2) = \mathfrak{t}_1(\gamma_1)$, on pose

$$\gamma_2 \#_1 \gamma_1(u; v) = \begin{cases} \gamma_1(u; v) & \text{pour } (u; v) \in [0; \delta_1(\gamma_1)] \times [0; \delta_2(\gamma_1)] \\ \gamma_2(u - \delta_1(\gamma_1); v) & \text{pour } (u; v) \in [\delta_1(\gamma_1); \delta_1(\gamma_1) + \delta_1(\gamma_2)] \times [0; \delta_2(\gamma_1)] \end{cases}$$

(Cette définition est valide. En effet, comme

$$\mathfrak{s}_1(\gamma_2) : [0; 1] \times [0; \delta_2(\gamma_2)] \to \mathbb{S}(X) \quad \text{et} \quad \mathfrak{t}_1(\gamma_1) : [0; 1] \times [0; \delta_2(\gamma_1)] \to \mathbb{S}(X)$$

on a $\delta_2(\gamma_1) = \delta_2(\gamma_2)$.)

– si $\mathfrak{s}_2(\gamma_2) = \mathfrak{t}_2(\gamma_1)$, on pose

$$\gamma_2 \#_2 \gamma_1(u; v) = \begin{cases} \gamma_1(u; v) & \text{pour } (u; v) \in [0; \delta_1(\gamma_1)] \times [0; \delta_2(\gamma_1)] \\ \gamma_2(u; v - \delta_2(\gamma_1)) & \text{pour } (u; v) \in [0; \delta_1(\gamma_1)] \times [\delta_2(\gamma_1); \delta_2(\gamma_1) + \delta_2(\gamma_2)] \end{cases}$$

(Comme précédemment on montre $\delta_2(\gamma_1) = \delta_2(\gamma_2)$.)

– sinon, on pose $\gamma_2 \#_1 \gamma_1 = \gamma_2 \#_2 \gamma_1 = \gamma_1$

Théorème 4.2.1
Les quadruplets $(\mathbb{S}(X); \mathfrak{s}_1; \mathfrak{t}_1; \#_1)$ *et* $(\mathbb{S}(X); \mathfrak{s}_2; \mathfrak{t}_2; \#_2)$ *sont des groupements.*

Démonstration

(GR 1) Soient $\gamma \in \mathbb{S}(X)$ et $(u; v) \in [0; 1] \times [0; \delta_2(\gamma)]$.

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_1(\gamma)(u; v) = \mathfrak{s}_1(\gamma(0; v)) = \gamma(0; v) = \mathfrak{s}_1(\gamma)(u; v)$$

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{t}_1(\gamma)(u; v) = \mathfrak{s}_1(\gamma(\delta_1(\gamma); v)) = \gamma(\delta_1(\gamma); v) = \mathfrak{t}_1(\gamma)(u; v)$$
$$\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_1(\gamma)(u; v) = \mathfrak{t}_1(\gamma(\delta_1(\gamma); v)) = \gamma(\delta_1(\gamma); v) = \mathfrak{t}_1(\gamma)(u; v)$$
$$\mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_1(\gamma)(u; v) = \mathfrak{s}_1(\gamma(0; v)) = \gamma(0; v) = \mathfrak{s}_1(\gamma)(u; v)$$

(GR 2) Soient γ_1 et γ_2 deux surfaces de Moore telles que $\mathfrak{s}_1(\gamma_2) = \mathfrak{t}_1(\gamma_1)$. Pour $(u; v) \in [0; 1] \times [0; \delta_2(\gamma_1)]$,

$$\mathfrak{s}_1(\gamma_2 \#_1 \gamma_1)(u; v) = \gamma_2 \#_1 \gamma_1(0; v) = \gamma_1(0; v) = \mathfrak{s}_1(\gamma_1)(u; v)$$
$$\mathfrak{t}_1(\gamma_2 \#_1 \gamma_1)(u; v) = \gamma_2 \#_1 \gamma_1(\delta_1(\gamma_1) + \delta_1(\gamma_2); v) = \gamma_2(\delta_1(\gamma_2); v) = \mathfrak{t}_1(\gamma_2)(u; v)$$

(GR 3) Soient γ_1, γ_2 et γ_3 deux surfaces de Moore telles que $\mathfrak{s}_1(\gamma_3) = \mathfrak{t}_1(\gamma_2)$ et $\mathfrak{s}_1(\gamma_2) = \mathfrak{t}_1(\gamma_1)$. Pour $(u; v) \in [0; \delta_1(\gamma_1) + \delta_1(\gamma_2) + \delta_1(\gamma_3)] \times [0; \delta_2(\gamma_1)]$,

$$(\gamma_3 \# \gamma_2) \# \gamma_1(u; v) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pour } 0 \leq u \leq \delta_{\gamma_1} \\ (\gamma_3 \# \gamma_2)(u - \delta_{\gamma_1}; v) & \text{pour } \delta_{\gamma_1} \leq u \leq \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} + \delta_{\gamma_3} \end{cases}$$

et

$$\gamma_3 \#(\gamma_2 \# \gamma_1)(u; v) = \begin{cases} \gamma_2 \# \gamma_1(u; v) & \text{pour } 0 \leq u \leq \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} \\ \gamma_3(u - \delta_{\gamma_1} - \delta_{\gamma_2}; v) & \text{pour } \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} \leq u \leq \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} + \delta_{\gamma_3} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} (\gamma_3 \# \gamma_2) \# \gamma_1(u; v) & \\ &= \gamma_3 \#(\gamma_2 \# \gamma_1)(u; v) \\ &= \begin{cases} \gamma_1(u; v) & \text{pour } 0 \leq u \leq \delta_{\gamma_1} \\ \gamma_2(u - \delta_{\gamma_1}; v) & \text{pour } \delta_{\gamma_1} \leq u \leq \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} \\ \gamma_3(u - \delta_{\gamma_1} - \delta_{\gamma_2}; v) & \text{pour } \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} \leq u \leq \delta_{\gamma_1} + \delta_{\gamma_2} + \delta_{\gamma_3} \end{cases} \end{aligned}$$

Cela montre que $(\mathbb{S}(X); \mathfrak{s}_1; \mathfrak{t}_1; \#_1)$ est un groupement. La démonstration est semblable pour $(\mathbb{S}(X); \mathfrak{s}_2; \mathfrak{t}_2; \#_2)$. ❏

Étudions de plus près les liens qui unissent ces deux structures de groupements.

Proposition 4.2.2
Soient $(\mathbb{S}(X); \mathfrak{s}_1; \mathfrak{t}_1; \#_1)$ *et* $(\mathbb{S}(X); \mathfrak{s}_2; \mathfrak{t}_2; \#_2)$ *les deux structures de groupement sur* $\mathbb{S}(X)$ *introduites dans le théorème 4.2.1. On a les égalités*

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_1 \qquad \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_2\mathfrak{t}1$$

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_2\mathfrak{s}_1 \qquad \mathfrak{s}_2\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_2$$

Démonstration Soient $\gamma \in \mathbb{S}(X)$ et $(u;v) \in [0;1] \times [0;1]$.

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2\,(\gamma)\,(u;v) = \mathfrak{s}_1\,(\gamma)\,(u;0) = \gamma(0;0) \quad \text{et} \quad \mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_1\,(\gamma)\,(u;v) = \mathfrak{s}_2\,(\gamma)\,(0;v) = \gamma(0;0)$$

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{t}_2\,(\gamma)\,(u;v) = \mathfrak{s}_1\,(\gamma)\,(u;1) = \gamma(0;1) \quad \text{et} \quad \mathfrak{t}_2\mathfrak{s}_1\,(\gamma)\,(u;v) = \mathfrak{t}_2\,(\gamma)\,(0;v) = \gamma(0;1)$$

$$\mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_2\,(\gamma)\,(u;v) = \mathfrak{t}_1\,(\gamma)\,(u;0) = \gamma(1;0) \quad \text{et} \quad \mathfrak{s}_2\mathfrak{t}_1\,(\gamma)\,(u;v) = \mathfrak{s}_2\,(\gamma)\,(1;v) = \gamma(1;0)$$

$$\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\,(\gamma)\,(u;v) = \mathfrak{t}_1\,(\gamma)\,(u;1) = \gamma(1;1) \quad \text{et} \quad \mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_1\,(\gamma)\,(u;v) = \mathfrak{t}_2\,(\gamma)\,(1;v) = \gamma(1;1)$$

❏

Cette proposition est à rapprocher du corollaire 3.4.13.

Proposition 4.2.3
Soient γ_i, pour $i = 1, \ldots, 4$, quatres éléments de $\mathbb{S}(X)$. Si $\mathfrak{s}_2(\gamma_2) = \mathfrak{t}_2(\gamma_1)$, $\mathfrak{s}_2(\gamma_4) = \mathfrak{t}_2(\gamma_3)$, $\mathfrak{s}_1(\gamma_3) = \mathfrak{t}_1(\gamma_1)$ et $\mathfrak{s}_1(\gamma_4) = \mathfrak{t}_1(\gamma_2)$ alors les surfaces de Moore

$$(\gamma_4 \#_2 \gamma_3) \#_1 (\gamma_2 \#_2 \gamma_1) \quad \textit{et} \quad (\gamma_4 \#_1 \gamma_2) \#_2 (\gamma_3 \#_1 \gamma_1)$$

existent et sont égales :

$$(\gamma_4 \#_2 \gamma_3) \#_1 (\gamma_2 \#_2 \gamma_1) = (\gamma_4 \#_1 \gamma_2) \#_2 (\gamma_3 \#_1 \gamma_1)$$

Démonstration Commençons par remarquer que les quatre conditions imposées impliquent

$$\delta_1(\gamma_1) = \delta_1(\gamma_2), \qquad \delta_1(\gamma_3) = \delta_1(\gamma_4)$$

et

$$\delta_2(\gamma_1) = \delta_2(\gamma_3), \qquad \delta_2(\gamma_2) = \delta_2(\gamma_4)$$

Il est clair que la surface de Moore $(\gamma_4 \#_2 \gamma_3) \#_1 (\gamma_2 \#_2 \gamma_1)$ existe si les conditions

$$\mathfrak{s}_2(\gamma_2) = \mathfrak{t}_2(\gamma_1), \quad \mathfrak{s}_2(\gamma_4) = \mathfrak{t}_2(\gamma_3) \quad \text{et} \quad \mathfrak{s}_1(\gamma_4 \#_2 \gamma_3) = \mathfrak{t}_1(\gamma_2 \#_2 \gamma_1)$$

sont satisfaites. Par hypothèse, seule la dernière mérite une justification.
Pour tout $(u;v) \in [0;\delta_1(\gamma_1)] \times [0;\delta_2(\gamma_1) + \delta_2(\gamma_2)]$,

$$\gamma_2 \#_2 \gamma_1(u;v) = \begin{cases} \gamma_1(u;v) & \text{si } 0 \leq v \leq \delta_2(\gamma_1) \\ \gamma_2(u; v - \delta_2(\gamma_1)) & \text{si } \delta_2(\gamma_1) \leq v \leq \delta_2(\gamma_1) + \delta_2(\gamma_2) \end{cases}$$

et pour tout $(u;v) \in [0;\delta_1(\gamma_3)] \times [0;\delta_2(\gamma_1) + \delta_2(\gamma_2)]$,

$$\gamma_4 \#_2 \gamma_3(u;v) = \begin{cases} \gamma_3(u;v) & \text{si } 0 \leq v \leq \delta_2(\gamma_1) \\ \gamma_4(u; v - \delta_2(\gamma_1)) & \text{si } \delta_2(\gamma_1) \leq v \leq \delta_2(\gamma_1) + \delta_2(\gamma_2) \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $(u;v) \in [0;1] \times [0;\delta_2(\gamma_1) + \delta_2(\gamma_2)]$, on trouve

$$\mathfrak{t}_1\,(\gamma_2 \#_2 \gamma_1)\,(u;v) = \begin{cases} \gamma_1(\delta_1(\gamma_1); v) & \text{si } 0 \leq v \leq \delta_2(\gamma_1) \\ \gamma_2(\delta_1(\gamma_1); v - \delta_2(\gamma_1)) & \text{si } \delta_2(\gamma_1) \leq v \leq \delta_2(\gamma_1) + \delta_2(\gamma_2) \end{cases}$$

et

$$\mathfrak{s}_1\,(\gamma_4 \,\#_2\, \gamma_3)\,(u;v) = \begin{cases} \gamma_3(0;v) & \text{si } 0 \leq v \leq \delta_2(\gamma_3) \\ \gamma_2(0;v-\delta_2(\gamma_1)) & \text{si } \delta_2(\gamma_3) \leq v \leq \delta_2(\gamma_3)+\delta_2(\gamma_4) \end{cases}$$

Or les conditions $\mathfrak{s}_1(\gamma_3) = \mathfrak{t}_1(\gamma_1)$ et $\mathfrak{s}_1(\gamma_4) = \mathfrak{t}_1(\gamma_2)$ s'écrivent de la manière suivante

$$\begin{cases} \gamma_3(0;v) = \gamma_1(\delta_1(\gamma_1);v) & \text{pour } 0 \leq v \leq \delta_2(\gamma_1) \\ \gamma_4(0;v) = \gamma_2(\delta_1(\gamma_1);v) & \text{pour } 0 \leq v \leq \delta_2(\gamma_2) \end{cases}$$

Par conséquent, l'égalité $\mathfrak{t}_1\,(\gamma_2 \,\#_2\, \gamma_1) = \mathfrak{s}_1\,(\gamma_4 \,\#_2\, \gamma_3)$ est bien vérifiée et, pour tout

$$(u;v) \in [0;\delta_1(\gamma_1)+\delta_1(\gamma_3)] \times [0;\delta_2(\gamma_1)+\delta_2(\gamma_2)]$$

$(\gamma_4 \,\#_2\, \gamma_3)\,\#_1(\gamma_2 \,\#_1\, \gamma_1)(u;v)$ est égal à

$$\begin{cases} \gamma_1(u;v) & \text{pour } (u;v) \in [0;\delta_1(\gamma_1)] \times [0;\delta_2(\gamma_1)] \\ \gamma_3(u-\delta_1(\gamma_1);v) & \text{pour } (u;v) \in [\delta_1(\gamma_1);\delta_1(\gamma_1)+\delta_1(\gamma_3)] \times [0;\delta_2(\gamma_1)] \\ \gamma_2(u;v-\delta_2(\gamma_1)) & \text{pour } (u;v) \in [0;\delta_1(\gamma_1)] \times [\delta_2(\gamma_1);\delta_2(\gamma_1)+\delta_2(\gamma_2)] \\ \gamma_4(u-\delta_1(\gamma_1);v-\delta_2(\gamma_2)) & \text{pour } (u;v) \in [\delta_1(\gamma_1);\delta_1(\gamma_1)+\delta_1(\gamma_3)] \times [\delta_2(\gamma_1);\delta_2(\gamma_1)+\delta_2(\gamma_2)] \end{cases}$$

De même, il est clair que la surface de Moore $(\gamma_4 \,\#_1\, \gamma_2)\,\#_2(\gamma_3 \,\#_1\, \gamma_1)$ existe si les conditions $\mathfrak{s}_1(\gamma_4) = \mathfrak{t}_1(\gamma_2)$, $\mathfrak{s}_1(\gamma_3) = \mathfrak{t}_1(\gamma_1)$ et $\mathfrak{s}_2(\gamma_4 \,\#_1\, \gamma_2) = \mathfrak{t}_2(\gamma_3 \,\#_1\, \gamma_1)$ sont satisfaites. Les deux premières étant évidentes, intéressons nous à la troisième.
Pour tout $(u;v) \in [0;\delta_1(\gamma_1)+\delta_1(\gamma_3)] \times [0;\delta_2(\gamma_1)]$,

$$\gamma_3 \,\#_1\, \gamma_1(u;v) = \begin{cases} \gamma_1(u;v) & \text{si } 0 \leq u \leq \delta_1(\gamma_1) \\ \gamma_3(u-\delta_1(\gamma_1);v) & \text{si } \delta_1(\gamma_1) \leq u \leq \delta_1(\gamma_1)+\delta_1(\gamma_3) \end{cases}$$

et pour tout $(u;v) \in [0;\delta_1(\gamma_1)+\delta_1(\gamma_3)] \times [0;\delta_2(\gamma_2)]$,

$$\gamma_4 \,\#_1\, \gamma_2(u;v) = \begin{cases} \gamma_2(u;v) & \text{si } 0 \leq u \leq \delta_1(\gamma_1) \\ \gamma_4(u-\delta_1(\gamma_1);v) & \text{si } \delta_1(\gamma_1) \leq u \leq \delta_1(\gamma_1)+\delta_1(\gamma_3) \end{cases}$$

Pour tout $(u;v) \in [0;\delta_1(\gamma_1)+\delta_1(\gamma_3)] \times [0;1]$, on a ainsi

$$\mathfrak{t}_2\,(\gamma_3 \,\#_1\, \gamma_1)\,(u;v) = \begin{cases} \gamma_1(u;\delta_2(\gamma_1)) & \text{si } 0 \leq u \leq \delta_1(\gamma_1) \\ \gamma_3(u-\delta_1(\gamma_1);\delta_2(\gamma_1)) & \text{si } \delta_1(\gamma_1) \leq u \leq \delta_1(\gamma_1)+\delta_1(\gamma_3) \end{cases}$$

et

$$\mathfrak{s}_2\,(\gamma_4 \,\#_1\, \gamma_1)\,(u;v) = \begin{cases} \gamma_3(u;0) & \text{si } 0 \leq u \leq \delta_1(\gamma_1) \\ \gamma_2(u-\delta_1(\gamma_1);0) & \text{si } \delta_1(\gamma_1) \leq u \leq \delta_1(\gamma_1)+\delta_1(\gamma_3) \end{cases}$$

Comme les conditions $\mathfrak{s}_2(\gamma_2) = \mathfrak{t}_2(\gamma_1)$ et $\mathfrak{s}_2(\gamma_4) = \mathfrak{t}_2(\gamma_3)$ s'écrivent de la manière suivante

$$\begin{cases} \gamma_2(u;O) = \gamma_1(u;\delta_2(\gamma_1)) & \text{pour } 0 \leq u \leq \delta_1(\gamma_1) \\ \gamma_4(u;0) = \gamma_3(u;\delta_2(\gamma_1)) & \text{pour } 0 \leq u \leq \delta_1(\gamma_3) \end{cases}$$

Par conséquent, l'égalité

$$\mathfrak{t}_2\,(\gamma_3\,\#_1\,\gamma_1) = \mathfrak{s}_2\,(\gamma_4\,\#_1\,\gamma_2)$$

est satisfaite et, pour tout

$$(u;v) \in [0;\delta_1(\gamma_1)+\delta_1(\gamma_3)] \times [0;\delta_2(\gamma_1)+\delta_2(\gamma_2)]$$

$(\gamma_4\,\#_1\,\gamma_2)\,\#_2(\gamma_3\,\#_1\,\gamma_1)(u;v)$ est égal à

$$\begin{cases} \gamma_1(u;v) & \text{pour } (u;v) \in [0;\delta_1(\gamma_1)] \times [0;\delta_2(\gamma_1)] \\ \gamma_3(u-\delta_1(\gamma_1);v) & \text{pour } (u;v) \in [\delta_1(\gamma_1);\delta_1(\gamma_1)+\delta_1(\gamma_3)] \times [0;\delta_2(\gamma_1)] \\ \gamma_2(u;v-\delta_2(\gamma_1)) & \text{pour } (u;v) \in [0;\delta_1(\gamma_1)] \times [\delta_2(\gamma_1);\delta_2(\gamma_1)+\delta_2(\gamma_2)] \\ \gamma_4(u-\delta_1(\gamma_1);v-\delta_2(\gamma_2)) & \text{pour } (u;v) \in [\delta_1(\gamma_1);\delta_1(\gamma_1)+\delta_1(\gamma_3)] \times [\delta_2(\gamma_1);\delta_2(\gamma_1)+\delta_2(\gamma_2)] \end{cases}$$

D'où le résultat. ❏

4.3 *I*-espaces de Moore

Soit I un ensemble non vide. On appelle *I-espace de Moore* de X toute application continue $\eta : \prod_{i\in I}[0;d_i] \to X$ où $(d_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres réels strictement positifs. Ici l'espace $\prod_{i\in I}[0;d_i]$ est muni de la topologie produit et tous les $[0;d_i]$ sont munis de celle induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.
Pour $I = \{1\}$, nous retouvons les chemins de Moore et, pour $I = \{1;2\}$, nous obtenons les surfaces de Moore.
Notons $\mathbb{M}_I(X)$ l'ensemble des I-espaces de Moore de X. Comme nous l'avons fait pour les chemins et les surfaces nous pouvons définir une application de durée $\delta_i : \mathbb{E}_I(X) \to]0;+\infty[$, pour chaque $i \in I$, en posant

$$\delta_i(\eta) = d_i$$

pour tout $\eta : \prod_{i\in I}[0;d_i] \to X$ appartenant à $\mathbb{M}_I(X)$. Nous dirons que $\delta_i(\eta)$ est la durée de η dans la i-ième direction.
Maintenant nous allons construire Card(I) structures de groupements sur l'ensemble $\mathbb{E}_I(X)$. Mais avant, définissons une nouvelle notation. Si $(u_i)_I$ est une famille de nombres, nous écrirons $(u_j \lhd_i x)_I$ pour indiquer que l'on s'intéresse à la famille $(u_i)_I$ dans laquelle le i-ième terme u_i est remplacé par le nombre x. De manière plus générale, nous noterons $(u_k \lhd_i x \lhd_j y)_I$, pour $i \neq j$, la famille $(u_i)_I$ dont les termes u_i et u_j sont remplacés respectivement par x et y. Maintenant, pour chaque $i \in I$, posons

- $\mathfrak{s}_i : \mathbb{E}_I(X) \to \mathbb{E}_I(X)$ avec $\mathfrak{s}_i(\eta)(u_j)_I = \eta(u_i \lhd_i 0)_I$ pour tout $(u_j)_I \in \prod_{j\in I}\left[0;\delta_j(\eta) \lhd_i 0\right]$
- $\mathfrak{t}_i : \mathbb{E}_I(X) \to \mathbb{E}_I(X)$ avec $\mathfrak{t}_i(\eta)(u_j)_I = \eta(u_i \lhd_i \delta_i(\eta))_I$ pour tout $(u_j)_I \in \prod_{j\in I}\left[0;\delta_j(\eta) \lhd_i 0\right]$
- $\#_i : \mathbb{E}_I(X) \times \mathbb{E}_I(X) \to \mathbb{E}_I(X)$ avec
  - si $\mathfrak{t}_i(\eta_2) = \mathfrak{s}_i(\eta_1)$, alors $\eta_2\,\#_i\,\eta_1(u_j)_I$ est égal à

$$\begin{cases} \eta_1(u_j)_I, & (u_j) \in \prod_{j\in I}\left[0;\delta_j(\eta_1)\right] \\ \eta_2(u_j \lhd_i u_i - \delta_i(\eta_1))_I, & (u_j) \in \prod_{j\in I}\left[0 \lhd_i \delta_i(\eta_1);\delta_j(\eta_2) \lhd_i \delta_i(\eta_1)+\delta_i(\eta_2)\right] \end{cases}$$

  - sinon $\eta_2\,\#_i\,\eta_1 = \eta_1$

Des démonstrations semblables à celle du théorème 4.2.1 et des propositions 4.2.2 et 4.2.3, nous donne

Théorème 4.3.1
Pour chaque $i \in I$*, le quadruplet* $(\mathbb{E}_I(X); \mathfrak{s}_i; \mathfrak{t}_i; \#_i)$ *est un groupement.*

Proposition 4.3.2
Pour tous i *et* j *de* I, $i \neq j$*, on a* $\quad \mathfrak{s}_i\mathfrak{s}_j = \mathfrak{s}_j\mathfrak{s}_i, \quad \mathfrak{t}_i\mathfrak{t}_j = \mathfrak{t}_j\mathfrak{t}_i, \quad \mathfrak{s}_j\mathfrak{t}_i = \mathfrak{t}_i\mathfrak{s}_j$

Proposition 4.3.3
Soient η_i*, pour* $i = 1, \ldots, 4$*, quatres éléments de* $\mathbb{E}_I(X)$ *et* i, j *deux éléments distincts de* I*. Si* $\mathfrak{s}_i(\eta_2) = \mathfrak{t}_i(\eta_1)$, $\mathfrak{s}_i(\eta_4) = \mathfrak{t}_i(\eta_3)$, $\mathfrak{s}_j(\eta_3) = \mathfrak{t}_j(\eta_1)$ *et* $\mathfrak{s}_i(\eta_4) = \mathfrak{t}_j(\eta_2)$ *alors les I-espaces de Moore*

$$(\eta_4 \#_i \eta_3) \#_j (\eta_2 \#_j \eta_1) \quad \textit{et} \quad (\eta_4 \#_j \eta_2) \#_i (\eta_3 \#_j \eta_1)$$

existent et sont égaux :

$$(\eta_4 \#_i \eta_3) \#_j (\eta_2 \#_i \eta_1) = (\eta_4 \#_j \eta_2) \#_i (\eta_3 \#_j \eta_1)$$

Chapitre 5

Les groupements d'Alexandroff

Jusqu'à maintenant, nous avons cherché à calquer la théorie des groupements sur celle des catégories. Mais nous nous sommes alors trouvé dans l'impossibilité de définir un équivalent satisfaisant à la notion de transformation naturelle. Dans ce chapitre, objectif est de spécialiser très légèrement la notion de groupement afin de pouvoir construire des transformations « naturelles ».

5.1 Définition d'un groupement d'Alexandroff

Un *groupement d'Alexandroff* est un groupement $(\mathbb{B}; s; t; \#)$ qui possède un élément particulier α vérifiant les conditions suivantes :

(GALEX 1) Pour tout $x \in \mathbb{B}$ tel que $x \neq \alpha$, alors $s(x) \neq \alpha$ et $t(x) \neq \alpha$.

(GALEX 2) Pour tout $x \in \mathbb{B}$, on a $x \# \alpha = \alpha \# x = x$.

α sera parfois appelé l'*alexis* du groupement d'Alexandroff.

Remarque 5.1.1
Bien qu'il semble en vérifier toutes les propriétés, il ne faut pas croire que l'alexis soit une simple identité. La condition (GALEX 2) est plus forte que celle imposée aux identités. En effet, dans ce cas, la composée de l'alexis avec un autre élément quelconque laisse toujours ce dernier inchangé, alors que l'on est sûr que la composée d'une identité avec un autre élément ne le laisse invariant que si l'identité est la source ou le but de celui-ci. En résumé, un alexis est une super identité. De plus on a

Lemme 5.1.1
Un groupement d'Alexandroff possède un unique alexis.

Démonstration Supposons que α et α' soient deux alexis. Comme α satisfait la condition (GALEX 2), on a

$$\alpha \# \alpha' = \alpha'$$

De même, α' vérifiant aussi cette condition, on a

$$\alpha \# \alpha' = \alpha$$

Donc $\alpha = \alpha'$. ❑
C'est pour cette raison que nous écrirons $(\mathbb{B}; \alpha)$ pour désigner un groupement d'Alexandroff d'alexis α.

Remarque 5.1.2
Bien sûr nous aurions pu parler de groupements pointés, mais en topologie un espace pointé est simplement un espace topologique dans lequel on a choisi un élément sans imposé de condition sur celui-ci. En fait nous allons voir plus tard, qu'à tout groupement, on peut associer, de manière très naturelle, un groupement d'Alexandroff. La ressemblance avec le compactifié d'Alexandroff d'un espace topologique localement compact nous a semblé suffisamment forte pour utiliser ce nom. De plus les premiers exemples simples sont construit à partir d'un espace topologique.

Exemple 5.1.1
Soit X un espace topologique. Nous savons que l'ensemble des ouverts de X est stable par réunion finie et intersection finie. De plus il possède deux éléments particuliers : l'ensemble vide $\emptyset$ et X. Ce qui nous permet de définir deux structures de groupements d'Alexandroff :

1. $\left((\mathscr{O}\mathfrak{uv}(X); \overset{\cup}{s}; \overset{\cup}{t}; \cup); \emptyset\right)$ avec
   (a) $\mathscr{O}\mathfrak{uv}(X)$ l'ensemble des ouverts de X.
   (b) Pour tout $x \in \mathscr{O}\mathfrak{uv}(X)$,
   $$\overset{\cup}{s}(x) = X \quad \text{et} \quad \overset{\cup}{t}(x) = X$$
   (c) La composition est simplement la réunion.
   (d) l'alexis est l'ensemble vide.
2. $\left((\mathscr{O}\mathfrak{uv}(X); \overset{\cap}{s}; \overset{\cap}{t}; \cap); X\right)$ avec
   (a) $\mathscr{O}\mathfrak{uv}(X)$ l'ensemble des ouverts de X.
   (b) Pour tout $x \in \mathscr{O}\mathfrak{uv}(X)$,
   $$\overset{\cap}{s}(x) = x \quad \text{et} \quad \overset{\cap}{t}(x) = x$$
   (c) La composition est simplement l'intersection.
   (d) L'alexis est l'ensemble X.

La vérification des axiomes (GR 1), (GR 2), (GR 3), (GALEX 1) et (GALEX 2) est tellement simple que nous nous permettons de ne pas l'écrire.

Remarque 5.1.3
On peut munir l'ensemble des ouverts d'autres structures de groupement d'Alexandroff, mais celles-ci s'avéreront, plus tard, un peu meilleures.
Nous aurions aussi pu faire le même genre de constructions avec l'ensemble des fermés.

Exemple 5.1.2
Nous avons vu, dans le chapitre 3, exemple 3.2.2, qu'à partir d'un monoïde non vide $(M; \bullet)$ nous pouvions définir des groupements. Le problème qui se présentait alors était que nous étions obligé de choisir un élément quelconque dans M. Il n'y avait pas de construction canonique. En fait il est tout à fait simple d'associer canoniquement un groupement d'Alexandroff à un monoïde. En effet il suffit de réunir l'ensemble M avec les singletons $\{M\}$ et $\{\{M\}\}$ pour obtenir l'ensemble $\hat{M}$ et de poser

– pour tout $x \in \hat{M}$, si $x \neq M$, alors

$$\hat{s}(x) = \{M\} \quad \text{et} \quad \hat{t}(x) = \{M\}$$

sinon

$$\hat{s}(M) = \hat{t}(M) = M$$

– pour tous éléments x et y de $\hat{M}$,

$$x\hat{\bullet}y = \begin{cases} x \bullet y & \text{si } x \neq \{M\}, M \text{ et } y \neq \{M\}, M \\ y & \text{si } x = M \\ x & \text{si } y = M \\ \{M\} & \text{sinon} \end{cases}$$

$((\hat{M}; \hat{s}; \hat{t}; \hat{\bullet}); M)$ est un groupement d'Alexandroff :

(GR 1) La vérification est très simple. Il suffit de prendre $x \in \hat{M}$, et de distinguer dans les calculs le cas où $x \neq M$ et le cas où $x = M$.

(GR 2) Soient x et y deux éléments de $\hat{M}$ tels que $\hat{s}(x) = \hat{t}(y)$. Il y a deux possibilités :
- $\hat{s}(x) = \hat{t}(y) = \{M\}$ et alors x et y sont différents de M.
  Dans ce cas $x\hat{\bullet}y$ est égal à $x \bullet y \neq M$ ou à $\{M\}$. Ainsi

$$\hat{s}(x\hat{\bullet}y) = \{M\} = \hat{s}(y)$$

  et

$$\hat{t}(x\hat{\bullet}y) = \{M\} = \hat{t}(x)$$

- $\hat{s}(x) = \hat{t}(y) = M$ et alors x et y sont égaux à M. D'où

$$\hat{s}(x\hat{\bullet}y) = \hat{s}(M) = M = \hat{s}(y)$$

  et

$$\hat{t}(x\hat{\bullet}y) = \hat{t}(M) = M = \hat{t}(x)$$

(GR 3) Soient x, y et z trois éléments de $\hat{M}$ tels que $\hat{s}(x) = \hat{t}(y)$ et $\hat{s}(y) = \hat{t}(z)$. Comme précédemment, deux cas se présentent
- $\hat{s}(x) = \hat{t}(y) = \hat{s}(y) = \hat{t}(z) = \{M\}$ et alors x, y et z sont différents de M. Dans ce cas $(x\hat{\bullet}y)\hat{\bullet}z$ et $x\hat{\bullet}(y\hat{\bullet}z)$ sont égaux, respectivement, à $(x \bullet y) \bullet z$ et $x \bullet (y \bullet z)$ si x, y et z sont tous différents de $\{M\}$. Comme $\bullet$ est associative, on obtient l'égalité dans ce cas.
  Si l'un des trois éléments est égal à $\{M\}$, alors les deux compositions sont égales à $\{M\}$.
- $\hat{s}(x) = \hat{t}(y) = \hat{s}(y) = \hat{t}(z) = M$ et alors x, y et z sont égaux à M. D'où

$$(x\hat{\bullet}y)\hat{\bullet}z = M = x\hat{\bullet}(y\hat{\bullet}z)$$

(GALEX 1) Immédiat.

(GALEX 2) Ce déduit directement de la définition.

Remarque 5.1.4
Dans cet exemple, on a utilisé le fait bien connu qu'un ensemble ne peut pas appartenir à lui-même.

5.2 Groupement d'Alexandroff associé à un groupement

Nous allons nous inspirer de la construction faite pour les monoïdes.
Soit $(\mathbb{B}; s; t; \#)$ un groupement quelconque. Posons
- $\tilde{\mathbb{B}} = \mathbb{B} \cup \{\mathbb{B}\}$;
- $\tilde{s} : \tilde{\mathbb{B}} \to \tilde{\mathbb{B}}$,

$$\tilde{s}(x) = \begin{cases} s(x) & \text{si } x \neq \mathbb{B} \\ \mathbb{B} & \text{si } x = \mathbb{B} \end{cases}$$

- $\tilde{t} : \tilde{\mathbb{B}} \to \tilde{\mathbb{B}}$,

$$\tilde{t}(x) = \begin{cases} t(x) & \text{si } x \neq \mathbb{B} \\ \mathbb{B} & \text{si } x = \mathbb{B} \end{cases}$$

- $\tilde{\bullet} : \tilde{\mathbb{B}} \times \tilde{\mathbb{B}} \to \tilde{\mathbb{B}}$,

$$x \tilde{\bullet} y = \begin{cases} x \bullet y & \text{si } x \neq \mathbb{B} \text{ et } y \neq \mathbb{B} \\ x & \text{si } y = \mathbb{B} \\ y & \text{si } x = \mathbb{B} \end{cases}$$

Vérifions que $\left((\tilde{\mathbb{B}}; \tilde{s}; \tilde{t}; \tilde{\bullet}); \mathbb{B}\right)$ est un groupement d'Alexandroff.
Commençons par vérifier que $\left(\tilde{\mathbb{B}}; \tilde{s}; \tilde{t}; \tilde{\bullet}\right)$ est un groupement.

(GR 1) Soient $x \in \tilde{\mathbb{B}}$. Deux cas se présentent. Si $x \neq \mathbb{B}$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{s}\tilde{s}(x) &= \tilde{s}(s(x)) = s(s(x)) = s(x) = \tilde{s}(x) \\ \tilde{s}\tilde{t}(x) &= \tilde{s}(t(x)) = s(t(x)) = t(x) = \tilde{t}(x) \\ \tilde{t}\tilde{t}(x) &= \tilde{t}(t(x)) = t(t(x)) = t(x) = \tilde{t}(x) \\ \tilde{t}\tilde{s}(x) &= \tilde{t}(s(x)) = t(s(x)) = s(x) = \tilde{s}(x) \end{aligned}$$

car $s(x) \neq \mathbb{B}$ et $t(x) \neq \mathbb{B}$. Si $x = \mathbb{B}$, alors

$$\begin{aligned} \tilde{s}\tilde{s}(\mathbb{B}) &= \tilde{s}(\mathbb{B}) = \mathbb{B} = \tilde{s}(\mathbb{B}) \\ \tilde{s}\tilde{t}(\mathbb{B}) &= \tilde{s}(\mathbb{B}) = \mathbb{B} = \tilde{t}(\mathbb{B}) \\ \tilde{t}\tilde{t}(\mathbb{B}) &= \tilde{t}(\mathbb{B}) = \mathbb{B} = \tilde{t}(\mathbb{B}) \\ \tilde{t}\tilde{s}(\mathbb{B}) &= \tilde{t}(\mathbb{B}) = \mathbb{B} = \tilde{s}(\mathbb{B}) \end{aligned}$$

(GR 2) Soient x et y deux éléments de $\tilde{\mathbb{B}}$ tels que $\tilde{s}(x) = \tilde{t}(y)$. D'après la construction, $\tilde{s}(x) = \mathbb{B}$ et $\tilde{t}(y) = \mathbb{B}$ si, et seulement si x et y sont égaux à $\mathbb{B}$. Par conséquent, nous n'avons que deux cas à étudier :
- soit x et y appartiennent tous les deux à $\mathbb{B}$ et alors

$$s(x) = \tilde{s}(x) = \tilde{t}(y) = t(y)$$

et

$$\tilde{s}(x \tilde{\#} y) = s(x \# y) = s(y) = \tilde{s}(y)$$

$$\tilde{t}(x \tilde{\#} y) = t(x \# y) = t(x) = \tilde{t}(x)$$

– soit $x = y = \mathbb{B}$ et alors

$$\tilde{s}(x\tilde{\#}y) = \tilde{s}(\mathbb{B}) = \tilde{s}(y)$$

$$\tilde{s}(x\tilde{\#}y) = \tilde{t}(\mathbb{B}) = \tilde{t}(x)$$

(GR 3) Soient x, y et z trois éléments de $\tilde{\mathbb{B}}$ tels que $\tilde{s}(x) = \tilde{t}(y)$ et $\tilde{s}(y) = \tilde{t}(z)$. Comme précédemment, on remarque que l'on a deux cas : soit x, y et z appartiennent tous les trois à $\mathbb{B}$, soit ils sont tous les trois égaux à $\mathbb{B}$. Dans le premier cas, on a

$$(x\tilde{\#}y)\tilde{\#}z = (x \# y) \# z = x \#(y \# z) = x\tilde{\#}(y\tilde{\#}z)$$

car $(\mathbb{B}; s; t; \#)$ est un groupement. Dans le second cas, on a

$$(x\tilde{\#}y)\tilde{\#}z = \mathbb{B} \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = x\tilde{\#}(y\tilde{\#}z)$$

Il ne nous reste plus que les deux conditions (GALEX 1) et (GALEX 2) qui en font un groupement d'Alexandroff. Mais celles-ci sont absolument évidentes par construction.

5.3 Les g-morphismes d'Alexandroff

Bien entendu, les groupements d'Alexandroff étant avant tout des groupements, les g-morphismes habituels sont toujours à envisager. Mais il paraît intéressant, vu la présence des alexis, de s'intéresser plus particulièrement au g-morphismes qui transforment un alexis en un alexis.
Ainsi, un g-morphisme f du groupement d'Alexandroff $(\mathbb{B}_1, \alpha_1)$ vers le groupement d'Alexandroff $(\mathbb{B}_2; \alpha_2)$ est dit *d'Alexandroff* s'il vérifie

(MALEX) $f(\alpha_1) = \alpha_2$.

En suivant la démonstration du théorème 3.3.4, on obtient

Théorème 5.3.1
Si nous notons $\mathscr{G}\mathscr{M}\mathfrak{or}\mathscr{A}\mathfrak{lex}$ l'ensemble des petits g-morphismes d'Alexandroff, alors

$$(\mathscr{G}\mathscr{M}\mathfrak{or}\mathscr{A}\mathfrak{lex}; s; t; \#)$$

est une sous-catégorie de la catégorie

$$(\mathscr{G}\mathscr{M}\mathfrak{or}; s; t; \#)$$

Reprenons les exemples de la section 5.1.

Exemple 5.3.1
Soit $f : X_1 \to X_2$ une application continue entre espaces topologiques. Considérons l'application $\overset{\cup}{f}: \mathscr{O}\mathfrak{uv}(X_2) \to \mathscr{O}\mathfrak{uv}(X_1)$ définie par

$$\overset{\cup}{f}(x) = f^{-1}(x)$$

pour tout $x \in \mathscr{O}\mathfrak{uv}(X_2)$. Cette application est bien définie car l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert. Vérifions que $\overset{\cup}{f}$ est un g-morphisme d'Alexandroff.

(GMOR) Soient x et y deux éléments de $\mathscr{O}\mathfrak{uv}(X_2)$ tels que $\overset{\cup}{s_2}(x) = \overset{\cup}{t_2}(y)$. Or par définition, cela implique que x et y sont quelconques. Pour la même raison, la condition

$$\overset{\cup}{s_1}(\overset{\cup}{f}(x)) = \overset{\cup}{t_1}(\overset{\cup}{f}(y))$$

est trivialement vérifiée car les deux sont égales à X_1. De plus, on a

$$\overset{\cup}{f}(x \cup y) = f^{-1}(x \cup y) = f^{-1}(x) \cup f^{-1}(y) = \overset{\cup}{f}(x) \cup \overset{\cup}{f}(y)$$

(MALEX) Ce n'est rien d'autre que la conséquence du calcul

$$\overset{\cup}{f}(X_2) = f^{-1}(X_2) = X_1$$

Si $f_1 : X_1 \to X_2$ et $f_2 : X_2 \to X_3$ sont deux applications continues, alors, pour tout $x \in \mathscr{O}\mathfrak{uv}(X_3)$, on a

$$(f_2 f_1)^{\cup}(x) = (f_2 f_1)^{-1}(x) = f_1^{-1} f_2^{-1}(x) = \overset{\cup}{f_1} \# \overset{\cup}{f_2}(x)$$

De plus, si X est un espace topologique, alors

$$(\mathrm{Id}_X)^{\cup}(x) = x = \mathrm{Id}_{\mathscr{O}\mathfrak{uv}(X)}$$

En résumé, nous venons de montrer que $^{\cup}$ est un foncteur contravariant de la catégorie des petits espaces topologiques dans la catégorie $\mathscr{G}\mathscr{M}\mathfrak{or}\mathscr{A}\mathfrak{lex}$.
De la même manière, $^{\cap}$ est lui aussi un foncteur contravariant de la catégorie des petits espaces topologiques dans la catégorie des petits groupements d'Alexandroff $\mathscr{G}\mathscr{M}\mathfrak{or}\mathscr{A}\mathfrak{lex}$.

Exemple 5.3.2
Considérons $f : (M_1; \bullet_1) \to (M_2; \bullet_2)$ un morphisme de monoïdes. On définit une application $\hat{f}$ de $\hat{M}_1$ dans $\hat{M}_2$ en posant

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq \{M\}, M \\ \{M\} & \text{si } x = \{M\} \\ M & \text{si } x = M \end{cases}$$

$\hat{f}$ est un g-morphisme d'Alexandroff car

(GMOR) Soient x et y deux éléments de $\hat{M}_1$ vérifiant $\hat{s}(x) = \hat{t}(y)$. On a deux cas :

– $\hat{s}(x) = \hat{t}(y) = \{M_1\}$ et donc x et y sont différents de M_1.
  On a donc

$$\hat{s}(\hat{f}(x)) = \hat{s}(f(x)) = \{M_2\} = \hat{t}(f(y)) = \hat{t}(\hat{f}(y))$$

  Si les deux sont différents de $\{M_1\}$, alors

$$\hat{f}(x \hat{\bullet}_1 y) = f(x \bullet_1 y) = f(x) \bullet_1 f(y) = \hat{f}(x) \hat{\bullet}_1 \hat{f}(y)$$

  Si x ou y est égal à $\{M_1\}$, alors $x \hat{\bullet}_1 y = \{M_1\}$ et $\hat{f}(x) = \{M_2\}$ ou $\hat{f}(y) = \{M_2\}$. D'où

$$\hat{f}(x \hat{\bullet}_1 y) = \hat{f}(\{M_1\}) = \{M_2\} = \hat{f}(x) \hat{\bullet}_1 \hat{f}(y)$$

– $\hat{s}(x) = \hat{t}(y) = M_1$ et donc x et y sont égaux à M_1. Ainsi

$$\hat{s}\hat{f}(x) = M_2 = \hat{t}\hat{f}(y)$$

et

$$\hat{f}(x\hat{\bullet}_1 y) = \hat{f}(M_1) = M_2 = M_2\hat{\bullet}_2 M_2 = \hat{f}(x)\hat{\bullet}_2\hat{f}(y)$$

(MALEX) Par construction.

Il est clair que $\hat{}$ est un foncteur de la catégorie des petits monoïdes dans la catégorie des petits groupements d'Alexandroff $\mathscr{G}\mathscr{M}\mathfrak{or}\mathscr{A}\mathfrak{lex}$.

En s'inspirant de cet exemple on démontre

Théorème 5.3.2
Il existe un foncteur $\tilde{}$ *de la catégorie des petits groupements* $\mathscr{G}\mathscr{M}\mathfrak{or}$ *dans la catégorie des petits groupements d'Alexandroff* $\mathscr{G}\mathscr{M}\mathfrak{or}\mathscr{A}\mathfrak{lex}$.
Nous l'appellerons foncteurs d'Alexandroff .
Pour tout $(f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) \in \mathscr{G}\mathscr{M}\mathfrak{or}$ *et tout* $x \in \tilde{\mathbb{B}}_1 = \mathbb{B}_1 \cup \{\mathbb{B}_1\}$, *l'application* $\tilde{f} : \tilde{\mathbb{B}}_1 \to \tilde{\mathbb{B}}_2$ *est définie par*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq \mathbb{B}_1 \\ \mathbb{B}_2 & si\ y = \mathbb{B}_1 \end{cases}$$

Démonstration Commençons par vérifier que $\tilde{f}$ est bien un g-morphisme d'Alexandroff. Il est évident, d'après la construction, que la condition (MALEX) est vérifiée. Considérons maintenant deux éléments x et y de $\tilde{\mathbb{B}}_1$ tels que $\tilde{s}(x) = \tilde{t}(y)$. On a deux cas
– $\tilde{s}(x) = \tilde{t}(y) = \mathbb{B}_1$ et donc $x = y = \mathbb{B}_1$. Ainsi

$$\tilde{s}\tilde{f}(x) = \mathbb{B}_2 = \tilde{t}\tilde{f}(y)$$

et

$$\tilde{f}(x\tilde{\#}_1 y) = \tilde{f}(\mathbb{B}_1) = \mathbb{B}_2 = \tilde{f}(x)\tilde{\#}_2\tilde{f}(y)$$

– $\tilde{s}(x) = \tilde{t}(y) \neq \mathbb{B}_1$ et donc $s(x) = t(y)$. Par conséquent,

$$\tilde{s}\tilde{f}(x) = s f(x) = t f(y) = \tilde{t}\tilde{f}(y)$$

et

$$\tilde{f}(x\tilde{\#}_1 y) = f(x \#_1 y) = f(x) \#_2 f(y) = \tilde{f}(x)\tilde{\#}_2\tilde{f}(y)$$

La condition (GMOR) est donc satisfaite. Comme $\tilde{}$ est une application bien définie de $\mathscr{G}\mathscr{M}\mathfrak{or}$ dans $\mathscr{G}\mathscr{M}\mathfrak{or}\mathscr{A}\mathfrak{lex}$, il nous suffit maintenant de prouver que c'est un foncteur de la catégorie $(\mathscr{G}\mathscr{M}\mathfrak{or}; s; t\#)$ dans la catégorie $(\mathscr{G}\mathscr{M}\mathfrak{or}\mathscr{A}\mathfrak{lex}; s; t; \#)$.

(FONC 1) Pour tout g-morphisme $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$, on a

$$\tilde{}s(f) = \widetilde{\mathrm{Id}}_{\mathbb{B}_1} \quad \text{et} \quad \tilde{s}(f) = s(\tilde{f}) = \mathrm{Id}_{\tilde{\mathbb{B}}_1}$$

$$\tilde{}t(f) = \widetilde{\mathrm{Id}}_{\mathbb{B}_2} \quad \text{et} \quad \tilde{t}(f) = t(\tilde{f}) = \mathrm{Id}_{\tilde{\mathbb{B}}_2}$$

or il est clair au vue de la construction que $\widetilde{\mathrm{Id}}_{\mathbb{B}} = \mathrm{Id}_{\tilde{\mathbb{B}}}$ pour tout groupement $\mathbb{B}$.

(FONC 2) Considérons maintenant deux g-morphismes $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ et $g : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_3$ tels que $s(g) = t(f) = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}$.

$$\widetilde{(g \# f)}(x) = (g \# f)(x) = g(f(x))$$

et

$$(\tilde{g} \# \tilde{f})(x) = \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(f(x)) = g(f(x))$$

pour $x \in \mathbb{B}_1$ car $f(x) \neq \alpha_2$.
De plus

$$\widetilde{(g \# f)}(\alpha_1) = \alpha_3$$

et

$$(\tilde{g} \# \tilde{f})(\alpha_1) = \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(\alpha_2) = \alpha_3$$

Par conséquent

$$\widetilde{(g \# f)} = \tilde{g} \# \tilde{f}$$

❏

5.4 Les g-transformations d'Alexandroff

En s'inspirant de la définition des g-transformations donnée dans la section 3.3, on définit une *g-transformation d'Alexandroff* comme étant un quadruplet $\left(\eta^1; \eta^2; f_1; f_2\right)$ où

$$f_1, f_2 : (\mathbb{B}_1; \alpha_1) \to (\mathbb{B}_2; \alpha_2)$$

sont des g-morphismes d'Alexandroff et où

$$\eta^1, \eta^2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

sont des applications d'ensembles qui vérifient les conditions suivantes :

(GTRALEX 1) Pour tout $x \in \mathbb{B}_1$, on a
- soit $\eta^1(x) = \alpha_2$, soit $s_2\eta^1(x) = s_2 f_1(x)$ et $t_2\eta^1(x) = s_2 f_2(x)$;
- soit $\eta^2(x) = \alpha_2$, soit $s_2\eta^2(x) = t_2 f_1(x)$ et $t_2\eta^2(x) = t_2 f_2(x)$.

(GTRALEX 2) Pour tous x et y dans $\mathbb{B}_1$ satisfaisant $s_1(x) = t_1(y)$, on a

$$f_2(x) \#_2 \eta^1(x) = \eta^2(x) \#_2 f_1(x)$$

et

$$\eta^1(x) = \eta^2(y)$$

Comme nous l'avons déjà fait dans la section 3.4, nous noterons

$$(\eta^1; \eta^2) : f_1 \rightsquigarrow f_2$$

et même parfois

$$\eta : f_1 \rightsquigarrow f_2$$

Proposition 5.4.1
Si $(\eta^1;\eta^2) : f_1 \to f_2$ *est une g-transformation d'Alexandroff au dessus de* $\mathbb{B}_1$ *et* $\mathbb{B}_2$*, alors, pour tout* $x \in \mathbb{B}_1$*,*

1. $f_2(x) \#_2 \eta^1(x) = \eta^2(x) \#_2 f_1(x)$
2. $\eta^1(x) = \eta^2(s_1(x))$ *et* $\eta^1(t_1(x)) = \eta^2(x)$

Démonstration Ce sont des conséquences directes du fait que le couple x, $s_1(x)$ et le couple $t_1(x)$, x vérifie la condition (GTRALEX). ❏

Le premier et le plus simple des exemples que l'on puisse donner est celui construit dans la proposition ci-dessous.

Proposition 5.4.2
Soit $f : (\mathbb{B}_1;\alpha_1) \to (\mathbb{B}_2;\alpha_2)$ *un g-morphisme d'Alexandroff. Par abus, notons* $\alpha_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *l'application constante qui a tout* $x \in \mathbb{B}_1$ *associe l'alexis* α_2 *de* $\mathbb{B}_2$*.*
Le couple d'applications $(\alpha_2;\alpha_2)$ *définit une g-transformation d'Alexandroff de* f *vers lui-même.*

$$(\alpha_2;\alpha_2) : f \rightsquigarrow f$$

Démonstration Par définition, la condition (GRALEX 1) est trivialement vérifiée. De plus, pour tout $x \in \mathbb{B}_1$, on a

$$f(x) \#_2 \alpha_2(x) = f(x) \#_2 \alpha_2 = f(x)$$

et

$$\alpha_2(x) \#_2 f(x) = \alpha_2 \#_2 f(x) = f(x)$$

Par conséquent pour tous x et y de $\mathbb{B}_1$ tel que $s_1(x) = t_1(y)$, on a

$$f(x) \#_2 \alpha_2(x) = \alpha_2(x) \#_2 f(x)$$

et

$$\alpha_2(x) = \alpha_2(y) = \alpha_2$$

D'où la condition (GRALEX 2). ❏

Comme nous l'avons fait dans le chapitre 3, notons

$$\mathcal{G}\mathfrak{T}\mathfrak{rans}\mathcal{A}\mathfrak{lex}$$

l'ensemble des *petites g-transformations d'Alexandroff* (les groupements d'Alexandroff de base sont petits). Avant de munir cet ensemble de structures de groupement, commençons par les lemmes suivants :

Lemme 5.4.3
Soient $\eta : f_1 \rightsquigarrow f_2$ *et* $\eta' : f_2 \rightsquigarrow f_3$ *deux g-transformations d'alexandroff au dessus des groupements d'Alexandroff* $(\mathbb{B}_1;\alpha_1)$ *et* $(\mathbb{B}_2;\alpha_2)$*.*
Si nous écrivons

$$\eta' \# \eta = (\eta'^1 \#_2 \eta^1; \eta'^2 \#_2 \eta^2)$$

où pour tout $x \in \mathbb{B}_1$ *et* $i \in \{1;2\}$*, on a*

$$(\eta'^i \#_2 \eta^i)(x) = \eta'^2(x) \#_2 \eta^2(x)$$

alors $\eta' \# \eta$ *est une g-transformation d'Alexandroff de* f_1 *vers* f_3*.*

Démonstration Bien qu'elle soit simple, la démonstration est particulièrement pénible.

(GTRALEX 1) Soit x un élément de $\mathbb{B}_1$. Nous allons nous contenter de prouver la condition sur $\eta'^1 \#_2 \eta^1$ car la justification pour $\eta'^2 \#_2 \eta^2$ est identique. Plusieurs cas sont à prendre en considération :

– $\eta'^1(x) = \alpha_2$ et $\eta^1(x) = \alpha_2$. Alors $(\eta'^1 \#_2 \eta^1)(x) = \alpha_2$.

– $\eta'^1(x) = \alpha_2$ et $\eta^1(x) \neq \alpha_2$. Alors $(\eta'^1 \#_2 \eta^1)(x) = \eta^1(x)$ et, d'après (GTRALEX 1),

$$s_2(\eta'^1 \#_2 \eta^1)(x) = s_2\eta^1(x) = s_2 f_1(x)$$

$$t_2(\eta'^1 \#_2 \eta^1)(x) = t_2\eta^1(x) = s_2 f_2(x)$$

La proposition 5.4.1 appliquée à η' et $\eta'^1(x) = \alpha_2$, nous donne

$$f_3(x) = \eta'^2(x) \#_2 f_2(x)$$

Soit $\eta'^2(x) = \alpha_2$ et alors

$$f_3(x) = f_2(x)$$

$$s_2 f_3(x) = s_2 f_2(x)$$

soit $s_2\eta'^2(x) = t_2 f_2(x)$ et alors, d'après (GR 2),

$$s_2 f_3(x) = s_2 f_2(x)$$

Ainsi on a toujours

$$s_2(\eta'^1 \#_2 \eta^1)(x) = s_2 f_1(x)$$

$$t_2(\eta'^1 \#_2 \eta^1)(x) = s_2 f_3(x)$$

– $\eta'^1(x) \neq \alpha_2$ et $\eta^1(x) = \alpha_2$. Ainsi, en utilisant (ALEX 2), on trouve

$$(\eta'^1 \#_2 \eta^1)(x) = \eta'^1(x)$$

D'aprés (GTRALEX 1)

$$s_2(\eta'^1 \#_2 \eta^1)(x) = s_2\eta'^1(x) = s_2 f_2(x)$$

$$t_2(\eta'^1 \#_2 \eta^1)(x) = t_2\eta'^1(x) = s_2 f_3(x)$$

η est une g-transformation d'Alexandroff et $\eta^1(x) = \alpha_2$. D'où

$$f_2(x) = \eta^2(x) \#_2 f_1(x)$$

Comme précédemment, soit $\eta^2 = \alpha_2$, soit $s_2\eta^2(x) = t_2 f_1(x)$. Dans les deux cas, on obtient

$$s_2 f_2(x) = s_2 f_1(x)$$

Finalement,

$$s_2(\eta'^1 \#_2 \eta^1)(x) = s_2 f_1(x)$$

$$t_2(\eta'^1 \#_2 \eta^1)(x) = s_2 f_3(x)$$

– $\eta'^1(x) = \alpha_2$ et $\eta^1(x) = \alpha_2$. C'est plus simple car on a

$$(\eta'^1 \#_2 \eta^1)(x) = \alpha_2$$

(GTRALEX 2) Pour tous x et y dans $\mathbb{B}_1$ vérifiant $s_2(x) = t_2(y)$, on a

$$\begin{aligned} f_3(x) \#_2 (\eta'^1 \#_2 \eta^1)(x) &= f_3(x) \#_2 (\eta'^1(x) \#_2 \eta^1(x)) \\ &= (f_3(x) \#_2 \eta'^1(x)) \#_2 \eta^1(x) \\ &= (\eta'^2(x) \#_2 f_2(x)) \#_2 \eta^1(x) \\ &= \eta'^2(x) \#_2 (f_2(x) \#_2 \eta^1(x)) \\ &= \eta'^2(x) \#_2 (\eta^2(x) \#_2 f_1(x)) \\ &= (\eta'^2(x) \#_2 \eta^2(x)) \#_2 f_1(x) = (\eta'^2 \#_2 \eta^2)(x) \#_2 f_1(x) \end{aligned}$$

et

$$(\eta'^1 \#_2 \eta^1)(x) = \eta'^1(x) \#_2 \eta^1(x) = \eta'^2(y) \#_2 \eta^2(y) = (\eta'^2 \#_2 \eta^2)(y)$$

❑

Lemme 5.4.4
Soient $f : \mathbb{B}'_1 \to \mathbb{B}_1$, $g : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}'_2$ deux g-morphismes d'Alexandroff et $(\eta^1; \eta^2) : (f_1 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2) \rightsquigarrow (f_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)$ une g-transformation.
Les quadruplets $\left(\eta^1 f; \eta^2 f; f_1 f; f_2 f\right)$ et $\left(g\eta^1; g\eta^2; g f_1; g f_2\right)$ sont des g-transformations d'Alexandroff.

Démonstration Nous ne ferons la démonstration que pour $(\eta^1 f; \eta^2 f) : f_1 f \rightsquigarrow f_2 f$. Nous avons déjà vu que $f_1 f$ et $f_2 f$ sont des g-morphismes d'Alexandroff.

(GTRALEX 1) Pour $x \in \mathbb{B}'_1$, on a soit

$$(\eta^1 f)(x) = \eta^1(f(x)) = \alpha_2$$

soit

$$s_2(\eta^1 f)(x) = s_2\eta^1(f(x)) = s_2 f_1(f(x)) = s_2(f_1 f)(x)$$

et

$$t_2(\eta^1 f)(x) = t_2\eta^1(f(x)) = s_2 f_2(f(x)) = s_2(f_2 f)(x)$$

On prouve de la même façon les égalités concernant $\eta^2 f$.

(GTRALEX 2) Soient x et y deux éléments de $\mathbb{B}'_1$ tels que $s'_1(x) = t'_1(y)$. Comme f est un g-morphisme, on a

$$s_1 f(x) = t_1 f(y)$$

Or $(\eta^1; \eta^2)$ est une g-transformation d'Alexandroff, on a donc

$$f_2(f(x)) \#_2 \eta^1(f(x)) = \eta^2(f(x)) \#_2 f_1(f(x))$$

$$(f_2 f)(x) \#_2 (\eta^1 f)(x) = (\eta^2 f)(x) \#_2 (f_1 f)(x)$$

et

$$(\eta^1 f)(x) = \eta^1(f(x)) = \eta^2(f(y)) = (\eta^2 f)(y)$$

❑

Pour simplifier, si au lieu de noter $(\eta^1;\eta^2)$ nous notons η la g-transformation d'Alexandroff du lemme, alors nous écrirons ηf pour $(\eta^1 f;\eta^2 f)$ et $g\eta$ pour $(g\eta^1;g\eta^2)$.

Lemme 5.4.5
Soient $\eta : f_1 \rightsquigarrow f_2$ et $\eta' : f_1' \rightsquigarrow f_2'$ deux g-transformations d'Alexandroff. Supposons que $f_1, f_2 : (\mathbb{B}_1;\alpha_1) \to (\mathbb{B}_2;\alpha_2)$ et $f_1', f_2' : (\mathbb{B}_2;\alpha_2) \to (\mathbb{B}_3;\alpha_3)$. Les g-transformations d'Alexandroff

$$(\eta' f_2)\#(f_1'\eta) \quad et \quad (f_2'\eta)\#(\eta' f_1)$$

de $f_1' f_2$ vers $f_2' f_2$ existent.

Démonstration D'après les deux lemmes précédents, il suffit de constater que

$$\eta' f_2 : f_1' f_2 \rightsquigarrow f_2' f_2 \quad ; \quad f_1'\eta : f'^1 f_1 \rightsquigarrow f'^1 f_2$$

et

$$f_2'\eta : f_2' f_1 \rightsquigarrow f_2' f_2 \quad ; \quad \eta' f_1 : f'^1 f_1 \rightsquigarrow f'^2 f_1$$

❏

Nous pouvons maintenir établir le théorème principal de ce chapitre

Théorème 5.4.6
Notons $\mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans}\mathscr{A}\mathfrak{lex}$ l'ensemble des petites g-transformations d'Alexandroff. Ce sont des g-transformations d'Alexandroff au dessus de petits groupements d'Alexandroff.
D'après les lemmes ci-dessus, nous pouvons définir quatre applications

$$\sigma_0,\tau_0,\sigma_1,\tau_1 : \mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans}\mathscr{A}\mathfrak{lex} \to \mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans}\mathscr{A}\mathfrak{lex}$$

de la manière suivante : Pour tout $\eta : f_1 \rightsquigarrow f_2$ avec $f_1, f_2 : (\mathbb{B}_1;\alpha_1) \to (\mathbb{B}_2;\alpha_2)$

$$\begin{aligned}
\sigma_0(\eta) &= (\alpha_1;\alpha_1) : \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1} \rightsquigarrow \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1}\\
\tau_0(\eta) &= (\alpha_2;\alpha_2) : \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2} \rightsquigarrow \mathrm{Id}_{\mathbb{B}_2}\\
\sigma_1(\eta) &= (\alpha_2;\alpha_2) : f_1 \rightsquigarrow f_1\\
\tau_1(\eta) &= (\alpha_2;\alpha_2) : f_2 \rightsquigarrow f_2
\end{aligned}$$

Et toujours à l'aide des mêmes lemmes, nous pouvons construire trois nouvelles applications

$$\#,\boxtimes,\boxdot : \mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans}\mathscr{A}\mathfrak{lex}\times\mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans}\mathscr{A}\mathfrak{lex} \to \mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans}\mathscr{A}\mathfrak{lex}$$

en posant pour tous η et η' de $\mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans}\mathscr{A}\mathfrak{lex}$,

$$\eta'\#\eta = \begin{cases} \eta'\#\eta & si\ \sigma_1(\eta') = \tau_1(\eta)\ (lemme\ 5.4.3)\\ \eta & sinon\end{cases}$$

$$\eta'\boxtimes\eta = \begin{cases} (f_2'\eta)\#(\eta' f_1) & si\ \sigma_0(\eta') = \tau_0(\eta)\ (lemme\ 5.4.5)\\ \eta & sinon\end{cases}$$

$$\eta'\boxdot\eta = \begin{cases} (\eta' f_2)\#(f_1'\eta) & si\ \sigma_0(\eta') = \tau_0(\eta)\ (lemme\ 5.4.5)\\ \eta & sinon\end{cases}$$

Les quadruplets $(\mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans}\mathscr{A}\mathfrak{lex};\sigma_1;\tau_1;\#)$, $(\mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans}\mathscr{A}\mathfrak{lex};\sigma_1;\tau_1;\#)$, $(\mathscr{G}\mathscr{T}\mathfrak{rans}\mathscr{A}\mathfrak{lex};\sigma_1;\tau_1;\#)$ sont des groupements.

Démonstration Les parties techniques les plus difficiles ont été prouvées dans les différents lemmes ci-dessus. Les vérifications des axiomes (GR 1), (GR 2) et (GR 3) sont simples mais longues à écrire. Pour cette raison, nous nous permettons de les laisser au lecteur. ❑

En fait, une autre raison nous incite à ne pas écrire la démonstration de ce théorème. Il n'est pas tout à fait satisfaisant car il ne semble pas possible de démontrer que l'on ait toujours, quand les calculs sont possibles, les égalités

$$(\eta_4 \# \eta_3) \boxtimes (\eta_2 \# \eta_1) = (\eta_4 \boxtimes \eta_2) \# (\eta_3 \boxtimes \eta_1)$$

$$(\eta_4 \# \eta_3) \boxdot (\eta_2 \# \eta_1) = (\eta_4 \boxdot \eta_2) \# (\eta_3 \boxdot \eta_1)$$

Et puis il ne semble pas non plus que l'on ait

$$\eta_1 \boxtimes \eta_2 = \eta_1 \boxdot \eta_2$$

Commençons par étudier une condition pour laquelle cette égalité soit vérifiée.

Proposition 5.4.7

Démonstration $(\eta_1 \boxtimes \eta_2)^1 = (f_2'\eta_2^1) \#_2 (\eta_1^1 f_1) =$ La raison est que nous nous sommes trop laissé influencer par ce qui se passe pour les transformations naturelles de catégories. Comme pour les surfaces de Moore, si nous devions faire un schéma représentatif d'une g-transformation d'Alexandroff $(\eta^1; \eta^2) : f_1 \rightsquigarrow f_2$, nous serions sans doute tous amené à dessiner un carré du genre

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{B}_1; \alpha_1) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\eta^1"'] & (\mathbb{B}_2; \alpha_2) \arrow[d, "\eta^2"] \\
(\mathbb{B}_1; \alpha_1) \arrow[r, "f_2"'] & (\mathbb{B}_2; \alpha_2)
\end{tikzcd}$$

Ainsi, si nous avons $(\eta^2; \eta^3) : f_3 \rightsquigarrow f_4$ une g-transformation d'Alexandroff, représentée par

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{B}_2; \alpha_2) \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\eta^2"'] & (\mathbb{B}_3; \alpha_3) \arrow[d, "\eta^3"] \\
(\mathbb{B}_2; \alpha_2) \arrow[r, "f_4"'] & (\mathbb{B}_3; \alpha_3)
\end{tikzcd}$$

alors nous avons, comme pour les surfaces de Moore, envie d'écrire que $(\eta^2; \eta^3) \square (\eta^1; \eta^2)$ est une g-transformation d'Alexandroff représentée par la justaposition des deux carrés ci-dessus.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{B}_1; \alpha_1) \arrow[r, "f_3 f_1"] \arrow[d, "\eta^1"'] & (\mathbb{B}_3; \alpha_3) \arrow[d, "\eta^3"] \\
(\mathbb{B}_1; \alpha_1) \arrow[r, "f_4 f_2"'] & (\mathbb{B}_3; \alpha_3)
\end{tikzcd}$$

Commençons par prouver que c'est bien une g-transformation d'Alexandroff.

Lemme 5.4.8
Soient $(\eta^1; \eta^2) : f_1 \rightsquigarrow f_2$ *et* $(\eta^2; \eta^3) : f_3 \rightsquigarrow f_4$ *deux g-transformations d'Alexandroff. Alors le couple* $(\eta^1; \eta^3)$ *détermine lui aussi une g-transformation d'Alexandroff du g-morphisme d'Alexandroff* $f_3 \# f_1$ *vers le g-morphisme d'Alexandroff* $f_4 \# f_2$.

Démonstration Remarquons que par définition, les g-morphismes d'Alexandroff $f_3 \# f_1$ et $f_4 \# f_2$ ne sont à la base que les applications d'ensembles $f_3 f_1$ et $f_4 f_2$.
Supposons de plus que l'on a $f_1, f_2 : (\mathbb{B}_1; \alpha_1) \to (\mathbb{B}_2; \alpha_2)$ et $f_3, f_4 : (\mathbb{B}_2; \alpha_2) \to (\mathbb{B}_3; \alpha_3)$.
Pour tout y appartenant à $\mathbb{B}_2$, on sait que

$$\text{soit } \eta^2(y) = s_3 \eta^2(y)$$

Chapitre 6

Les 2-groupements stricts

Dans les deux chapitres précédents, nous avons vu qu'il apparaît très vite et de manière assez naturelle des ensembles munis de plusieurs structures de groupement. Dans ce chapitre nous allons nous contenter de déduire de quelques exemples la définition d'une notion intéressante construite à partir de deux structures de groupements.

6.1 Les surfaces de Moore

Nous avons vue dans le chapitre 4 que l'ensemble $\mathbb{S}(X)$ des surfaces de Moore d'un espace topologique X peut être muni de deux structures de groupement (théorème 4.2.1)

$$(\mathbb{S}(X); \mathfrak{s}_1; \mathfrak{t}_1; \#_1) \quad \text{et} \quad (\mathbb{S}(X); \mathfrak{s}_2; \mathfrak{t}_2; \#_2)$$

qui sont reliées entre elles par les deux propriétés suivantes :

1. (proposition 4.2.2) On a les égalités

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2 &= \mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_1 & \qquad \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2 &= \mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_1 \\ \mathfrak{s}_1\mathfrak{t}_2 &= \mathfrak{t}_2\mathfrak{s}_1 & \qquad \mathfrak{s}_2\mathfrak{t}_1 &= \mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_2 \end{aligned}$$

2. (proposition 4.2.3) Pour tous chemins de Moore γ_1, γ_2, γ_3 et γ_4 tels que

$$\mathfrak{s}_2(\gamma_2) = \mathfrak{t}_2(\gamma_1), \quad \mathfrak{s}_2(\gamma_4) = \mathfrak{t}_2(\gamma_3), \quad \mathfrak{s}_1(\gamma_3) = \mathfrak{t}_1(\gamma_1), \quad \mathfrak{s}_1(\gamma_4) = \mathfrak{t}_1(\gamma_2)$$

   on a

$$(\gamma_4 \#_2 \gamma_3) \#_1 (\gamma_2 \#_2 \gamma_1) = (\gamma_4 \#_1 \gamma_2) \#_2 (\gamma_3 \#_1 \gamma_1)$$

Étudions maintenant le cas des espaces topologiques.

6.2 Espaces topologiques

Si X est un espace topologique, alors, d'après le chapitre 5, l'ensemble des ouverts $\mathscr{O}\mathfrak{uv}(X)$ peut être muni de deux structures de groupements

$$(\mathscr{O}\mathfrak{uv}(X); \overset{\cup}{s}; \overset{\cup}{t}; \cup) \quad \text{et} \quad (\mathscr{O}\mathfrak{uv}(X); \overset{\cap}{s}; \overset{\cap}{t}; \cap)$$

Puisque pour tout ouvert x de X, on a, par définition,

$$\overset{\cup}{s}(x) = \overset{\cup}{t}(x) = X \quad \text{et} \quad \overset{\cap}{s}(x) = \overset{\cap}{t}(x) = x$$

il est très facile de vérifier les égalités

$$\overset{\cup}{s}\overset{\cap}{s} = \overset{\cap}{s}\overset{\cup}{s} \qquad \overset{\cup}{t}\overset{\cap}{t} = \overset{\cap}{t}\overset{\cup}{t}$$

$$\overset{\cup}{s}\overset{\cap}{t} = \overset{\cap}{t}\overset{\cup}{s} \qquad \overset{\cap}{s}\overset{\cup}{t} = \overset{\cup}{t}\overset{\cap}{s}$$

Supposons que x_1, x_2, x_3 et x_4 soient quatre ouverts de X qui vérifient les égalités

$$\overset{\cup}{s}(x_2) = \overset{\cup}{t}(x_1), \quad \overset{\cup}{t}(x_4) = \overset{\cup}{t}(x_3), \quad \overset{\cap}{s}(x_3) = \overset{\cap}{t}(x_1), \quad \overset{\cap}{s}(x_4) = \overset{\cap}{t}(x_2)$$

Ces conditions impliquent

$$x_1 = x_3 \quad \text{et} \quad x_2 = x_4$$

Cela implique

$$(x_4 \cup x_3) \cap (x_2 \cup x_1) = (x_2 \cup x_1) \cap (x_2 \cup x_1) = x_2 \cup x_1$$

et

$$(x_4 \cap x_2) \cup (x_3 \cap x_1) = x_2 \cup x_1$$

D'où

$$(x_4 \cup x_3) \cap (x_2 \cup x_1) = (x_4 \cap x_2) \cup (x_3 \cap x_1)$$

6.3 Les g-carrés

En utilisant le fait que $\mathscr{G}\mathscr{M}\mathfrak{or}$ est une catégorie, nous allons montrer que sa catégorie des flèches est naturellement muni de deux structures de catégorie qui satisfont les deux conditions vues dans les deux sections précédentes. Pour rester cohérent avec nos dénomination, nous parlerons de g-carrés. L'ensemble $\mathscr{G}\mathscr{C}\mathfrak{arr\acute{e}e}$ des g-carrés est l'ensemble des quadruplets $(x_1; x_2; y_1; y_2)$ où x_1, x_2, y_1 et y_2 sont des petits g-morphismes tels que

$$x_2 \# y_1 = y_2 \# x_1$$

Cela signifie que l'on a aussi

$$s(y_1) = s(x_1) \quad t(y_1) = s(x_2) \quad s(y_2) = t(x_1) \quad t(y_2) = t(x_2)$$

Notons $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 : \mathscr{G}\mathscr{C}\mathfrak{arr\acute{e}e} \to \mathscr{G}\mathscr{C}\mathfrak{arr\acute{e}e}$, les applications définies par

$$\mathfrak{s}_1(x_1; x_2; y_1; y_2) = (x_1; x_1; \mathrm{Id}; \mathrm{Id})$$
$$\mathfrak{s}_2(x_1; x_2; y_1; y_2) = (\mathrm{Id}; \mathrm{Id}; y_1; y_1)$$
$$\mathfrak{t}_1(x_1; x_2; y_1; y_2) = (x_2; x_2; \mathrm{Id}; \mathrm{Id})$$
$$\mathfrak{t}_2(x_1; x_2; y_1; y_2) = (\mathrm{Id}; \mathrm{Id}; y_2; y_2)$$

et $\#_1; \#_2 : \mathscr{GC}\mathfrak{arr\acute{e}e} \times \mathscr{GC}\mathfrak{arr\acute{e}e} \to \mathscr{GC}\mathfrak{arr\acute{e}e}$ les applications définies par

$$\begin{aligned}
&(x_1; x_2; y_1; y_2) \#_1 (x'_1; x'_2; y'_1; y'_2) \\
&\qquad = \begin{cases} (x'_1; x_2; y_1 \# y'_1; y_2 \# y'_2) & \text{si } \mathfrak{s}_1(x_1; x_2; y_1; y_2) = \mathfrak{t}_1(x'_1; x'_2; y'_1; y'_2) \\ (x'_1; x'_2; y'_1; y'_2) & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&(x_1; x_2; y_1; y_2) \#_2 (x'_1; x'_2; y'_1; y'_2) \\
&\qquad = \begin{cases} (x_1 \# x'_1; x_2 \# x'_2; y'_1; y_2) & \text{si } \mathfrak{s}_2(x_1; x_2; y_1; y_2) = \mathfrak{t}_2(x'_1; x'_2; y'_1; y'_2) \\ (x'_1; x'_2; y'_1; y'_2) & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Il est très facile de montrer que $(\mathscr{GC}\mathfrak{arr\acute{e}e}; \mathfrak{s}_1; \mathfrak{t}_1; \#_1)$ et $(\mathscr{GC}\mathfrak{arr\acute{e}e}; \mathfrak{s}_2; \mathfrak{t}_2; \#_2)$ sont des groupements et même des catégories.
De plus, pour tout $(x_1; x_2; y_1; y_2) \in \mathscr{GC}\mathfrak{arr\acute{e}e}$, on a

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2(x_1; x_2; y_1; y_2) = \mathfrak{s}_1(\mathrm{Id}; \mathrm{Id}; y_1; y_1) = (\mathrm{Id}; \mathrm{Id}; \mathrm{Id}; \mathrm{Id})$$

et

$$\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_1(x_1; x_2; y_1; y_2) = \mathfrak{s}_2(x_1; x_1; \mathrm{Id}; \mathrm{Id}) = (\mathrm{Id}; \mathrm{Id}; \mathrm{Id}; \mathrm{Id})$$

Pour être plus précis, on peut facilement voir que dans les deux cas les identités finales sont $\mathrm{Id}_{\mathbb{B}_1}$ où $\mathbb{B}_1$ est le groupement source de x_1. Par conséquent

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_1$$

et de même

$$\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_1 \quad \mathfrak{s}_1\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_2\mathfrak{s}_1 \quad \mathfrak{s}_2\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2$$

Prenons $\gamma^i = (x^i_1; x^i_2; y^i_1; y^i_2)$, $i = 1, \ldots, 4$, quatre éléments de $\mathscr{GC}\mathfrak{arr\acute{e}e}$ vérifiant

$$\mathfrak{s}_2(\gamma^2) = \mathfrak{t}_2(\gamma^1),\ \mathfrak{s}_2(\gamma^4) = \mathfrak{t}_2(\gamma^3),\ \mathfrak{s}_1(\gamma^3) = \mathfrak{t}_1(\gamma^1) \text{ et } \mathfrak{s}_1(\gamma^4) = \mathfrak{t}_1(\gamma^2)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
(\gamma^4 \#_2 \gamma^3) \#_1 (\gamma^2 \#_2 \gamma^1) &= (x^4_1 \# x^3_1; x^4_2 \# x^3_2; y^3_1; y^4_2) \#_1 (x^2_1 \# x^1_1; x^2_2 \# x^1_2; y^1_1; y^2_2) \\
&= (x^2_1 \# x^1_1; x^4_2 \# x^3_2; y^3_1 \# y^1_1; y^4_2 \# y^2_2)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\gamma^4 \#_1 \gamma^2) \#_2 (\gamma^3 \#_1 \gamma^1) &= (x^2_1; x^4_2; y^4_1 \# y^2_1; y^4_2 \# y^2_2) \#_2 (x^1_1; x^3_2; y^3_1 \# y^1_1; y^3_2 \# y^1_2) \\
&= (x^2_1 \# x^1_1; x^4_2 \# x^3_2; y^3_1 \# y^1_1; y^4_2 \# y^2_2)
\end{aligned}$$

On en déduit

$$(\gamma^4 \#_2 \gamma^3) \#_1 (\gamma^2 \#_2 \gamma^1) = (\gamma^4 \#_1 \gamma^2) \#_2 (\gamma^3 \#_1 \gamma^1)$$

6.4 Définition d'un 2-groupement strict

Tous les exemples précédents, nous conduisent à la définition ci-dessous.
Nous dirons qu'un septuplet $(\mathbb{B}; s_1; t_1; \#_1; s_2; t_2; \#_2)$ est un 2-*groupement strict* quand

(2-GR 1) les quadruplets $(\mathbb{B}; s_1; t_1; \#_1)$ et $(\mathbb{B}; s_2; t_2; \#_2)$ sont des groupements ;

(2-GR 2) les égalités ci-dessous sont satisfaites

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_1 \qquad \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_2\mathfrak{t}1$$

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_2\mathfrak{s}_1 \qquad \mathfrak{s}_2\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_2$$

(2-GR 3) si x_i, $i = 1, \ldots, 4$, sont quatre éléments de $\mathbb{B}$ et si

$$s_2(x_2) = t_2(x_1),\ \ s_2(x_4) = t_2(x_3),\ \ s_1(x_3) = t_1(x_1) \text{ et } s_1(x_4) = t_1(x_2)$$

alors les compositions

$$(x_4 \#_2 x_3) \#_1 (x_2 \#_2 x_1) \quad \text{et} \quad (x_4 \#_1 x_2) \#_2 (x_3 \#_1 x_1)$$

existent et sont égales

$$(x_4 \#_2 x_3) \#_1 (x_2 \#_2 x_1) = (x_4 \#_1 x_2) \#_2 (x_3 \#_1 x_1)$$

Puisque nous l'avons voulu ainsi, les sections 6.1, 6.2 et 6.3 sont des exemples de 2-groupements. Le premier d'entre eux est intéressant car il semble que ce soit l'une des premières fois que l'on arrive à munir l'ensemble des surfaces de Moore de compositions. Ce fait était connu depuis très longtemps pour les chemins, mais restait méconnu pour les surfaces.
Il est bien connu que les espaces topologiques définissent une catégorie (ensemble des ouverts muni de la structure de préordre induite par l'inclusion). Le défaut de se point de vue est que la réunion et l'intersection y sont complètement oubliées. De plus ils est facile de voir que les applications continues définissent par images réciproques des g-morphismes pour les deux structures de groupements envisagées précédemment.

Bibliographie

[1] C. Ehresmann *Catégories et structures* Dunod, 1965

[2] M. Kapranov et V. Voevodsky *Infinity-groupoids and homotopy types* Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques **32**, 1991

[3] S. MacLane *Categories for the Working Mathematician* Graduate Texts in Mathematics **5**, Springer-Verlag, 1971

[4] P. Mateus, A. Sernadas et C. Sernadas *Precategories for Combining Probabilistic Automata* Electronic Notes in Theoretical Computer Science **29**, 1999

[5] L. Schröder et H. Herrlich *Free Adjunction of Morphisms* Applied Categorical Strutures **8**(4), 2000